S. 1142. A

MEMORIE

DI MATEMATICA

E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE

TOMO XII

PARTE II

CONTENENTE LE MEMORIE DI FISICA.

MODENA

PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA

MDCCCV.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTA SECONDA PARTE.

Osservazioni anatomico-patologiche, Memoria di FLORIANO CALDANI. pag. 1

Sperienze ed osservazioni sopra l' irritabilità della lattuga, con delle riflessioni generali sull' irritabilità de' Vegetabili; di GIOACHINO CARRADORI presentata da *Antonio Cagnoli*. 30

Saggio di splancnografia ed encefalotomia della Foca; di VINCENZO MALACARNE. 39

Analisi dello smalto di un dente fossile di elefante e dei denti umani, Memoria di DOMENICO MORICHINI, presentata da *Gioachino Pessuti*. 73

Dell' Attrazione di superficie, Memoria di GIOACHINO CARRADORI, presentata da *Pompilio Pozzetti*. 89

Prospetto comparato della pioggia della Puglia, esibito da GIUSEPPE MARIA GIOVENE. 113

Brevi considerazioni di LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI intorno a quella crudele malattia che chiamasi Cancliero. 127

Osservazioni anatomiche di VINCENZO MALACARNE in conferma d' una proposizione circa all' origine de' Mostri pubblicata dal medesimo nel Tomo IX di queste Memorie. 164

Sull' epilessia e suo rimedio, Memoria di GIANVERARDO ZEVIANI. 179

Elatena, o Abiesino, Bevanda vinosa, indicata da GIOVANNI FABBRONI ai Montagnoli ed ai Maremmani d' Italia. 195

Me-

Memoria intorno ad una specie singolare di quella malattia che si chiama *Choléra morbus* o semplicemente *Choléra*, di LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI . pag. 204
Saggio di Nosologia vegetabile , di FILIPPO RE , presentato da *Pierantonio Bondioli* . 225
Ricerche di P. A. BONDIOLI sopra le forme particolari delle malattie universali. 256
Correzioni e Giunte fatte da DOMENICO MORICHINI alla sua Memoria quì stampata a pag. 73 e segg. , presentate da *Gioachino Pessuti* . 368
Sugli Animali Fossili , Memoria geologica di ERMENEGILDO PINI . 270
Sopra un nuovo laboratorio di salina a fuoco , Memoria di DOMENICO RANALDI . 330
Sopra una straordinaria affezione verminosa , Memoria di GIAMBATISTA DALL' OLIO, presentata da *Pompilio Pozzetti* . 347

ME-

MEMORIE

DI

MATEMATICA

INTORNO ALL' INCURVAZIONE DE' SOLIDI

Di Paolo Delanges

Ricevuta il dì 14 *Giugno* 1804.

Promossa da *Galileo* la teoria della renitenza de' solidi fitti ad una parete o sostenuti in uno o più punti, il *Viviani* ed il *Grandi* hanno il merito di averla coltivata, e di avere segnatamente determinate le figure di cui deggiono essere dotati i solidi, sicchè sporgendo da un muro con l' asse orizzontale, o essendo sostenuti verticalmente, la resistenza allo spezzamento d' ogni loro sezione verticale nel primo caso, ed orizzontale nel secondo, sia in equilibrio col peso della porzione anteriore di essi, e di cui la stessa sezione ne è la base.

L' indagine però a cui io mi rivolgo presentemente, reputandola di qualche utilità nelle pratiche, si è di determinare la figura propria ad impedire la incurvazione de' solidi derivante dal loro peso.

Il legname per esempio è da riporsi nella classe de' solidi intorno a' quali intendo di ragionare. Non v' ha nessuno cui non abbia osservato incurvarsi le travi, quantunque d' uniforme gros-

sezza, sostenute nel mezzo o nelle sue estremità in direzione orizzontale od obbliqua ; il che se avviene dal rilassamento delle fibre, di cui, secondo i Botanici, sono le piante tessute, tale rilassazione però può dipendere non solo dal passare l' atmosfera dallo stato umido al secco, allungandosi il legno nel primo caso, ed accorciandosi o strignendosi nel secondo, ma anche nella contemplata circostanza massimamente dal non essere abbastanza robuste e legate le predette fibre in guisa da resistere in linea retta, vincendo con l' adesione loro reciproca le parti più vicine agli appoggi il maggior momento delle più lontane.

In tale ricerca pertanto io assumo che i solidi di cui si deggiono determinare le figure, perchè risultino incurvabili dal proprio peso, debbano avere due piani opposti uguali e paralleli secondo la loro lunghezza, e che in conseguenza si possa considerarli sotto una sezione parallela a detti piani senza tener conto della larghezza o grossezza loro; ed inoltre che nella stessa specie sieno di egual densità in tutti i suoi elementi, di modo che rappresentando ADCB (Fig. I.) la sezione di un solido parallela a' piani opposti sostenuto ne' punti E, F, la base di tal sezione, cioè la retta AEFB possa riguardarsi come un vette caricato in ogni suo punto G d' un peso proporzionale alla corrispondente sezione verticale GH.

TEOREMA.

Se nel vette retto ACB (Fig. II) in cui i gravi H, G sono in equilibrio intorno al centro di moto C, si supponga che la retta BG esprima il grave G, e quindi fra gli assintoti DC C*b'* comprendenti l' angolo retto DC*b'* sia descritta l'iperbole equilatera EG*g''*: dico che qualunque ordinata *b'g'* esprime il grave che dovrebbe essere sospeso nel punto *b'*, in luogo del G sospeso al punto B per mantenere costantemente nel vette AC*b'* il primo equilibrio.

Imperciocchè essendo uguali i rettangoli delle CB, BG, C*b*, *bg*, C*b'*, *bg'* ec.; ed è il rettangolo della CB in un peso proporzionale alla BG uguale al momento del grave H : sarà dunque anche il

ret-

rettangolo della C*b* in un grave proporzionale all' ordinata *bg*, o della C*b'* in un grave proporzionale all' ordinata *b'g'* ec. eguale sempre al momento dello stesso grave G. Il che ec.

PROBLEMA I.

Trovare la sezione d'un solido sostenuto nella metà della sua lunghezza AB (Fig. III.), che sia pel proprio peso in ogni sua parte incurvabile.

Rappresentino le rette uguali AH, BG ordinate alla retta ACB le uguali sezioni verticali che il solido da costruirsi dee avere nelle sue estremità, e innalzata dal punto d' appoggio C la perpendicolare CD, negli assintoti AC, CD si descriva l' iperbole H*hh'*, e negli assintoti BC, CD l' eguale iperbole G*gg'*, la prima che passi pel punto H e la seconda pel punto G: dico che il solido di cui una sezione secondo la sua lunghezza è compresa dalle rette HA, ACB, BG e dalle due uguali iperbole H*hh'*, G*gg'*, che dalla parte D si prolunga all' infinito, sempre più assottigliandosi, è il solido ricercato.

Imperocchè essendo il rettangolo delle HA, AC uguale al rettangolo delle GB, BC, e l' iperbola H*hh'* la scala de' pesi del braccio AC, e l' iperbole G*gg'* la scala de' pesi del braccio BC nello stesso vette ACB (Teorema); sarà il rettangolo di qualunque sezione verticale nella parte del solido sul braccio AC nella rispettiva distanza dal centro di moto C, uguale al rettangolo di qualunque altra sezione verticale nell' altra parte del solido sull' altro braccio AC nella respettiva distanza dal centro medesimo: dunque il solido di cui una sezione secondo la sua lunghezza è compresa dalle rette HA, ACB, BG ed alle due uguali iperbole H*hh'*, G*gg'* sostenuto sulla metà della base in C, avrà tutti i suoi elementi in equilibrio fra di se, ed in conseguenza sarà dal proprio peso incurvabile. Il che ec.

COROLLARJ.

I. È manifesto che capovolgendosi il ritrovato solido HAC BGD in posizione verticale (Fig. IV.) sopra un appoggio o fondamento in D, saranno stessamente riguardo al proprio peso le sue parti HACD, GBCD incurvabili.

II. Se fosse confitta la metà DCBG colla sezione CD in una parete verticale, resisterebbe pure essa all'incurvazione: e qui è da osservarsi che per risultare il predetto solido tale che il suo momento, o quello d'ogni sua parte BcEG pareggi la resistenza allo spezzamento della respettiva sezione CD, o cE, dovrebbe essere conterminato, in luogo dell'arco iperbolico DeG, dall'arco parabolico DEB a cui sia tangente l'orizzontale CB.

PROBLEMA II.

Determinare la sezione di un solido incurvabile dal suo peso, essendo sostenuto da due appoggi A, B nelle estremità della sua base orizzontale AB (fig. V.).

Sia la lunghezza del solido AB $= a$, la grossezza che dee avere in un dato punto C, cioè la verticale CD $= p$, quella in un altro qualsivoglia punto b, cioè $bl = y$; sia poi la data distanza BC $= m$, sarà AC $= a - m$, e sia per ultimo l'ascissa B$b = x$, e sarà A$b = a - x$.

Considerando pertanto la base AB del solido AHhD$l g$GBA da determinarsi, come un vette caricato di pesi proporzionali alle sezioni DC, lb ec., è manifesto, che, perchè sia incurvabile dal proprio peso, immaginandosi un minimo rilassamento o incurvamento in esso, dovranno i momenti del peso in b di qualsivoglia sezione bl rappresentato da y, riguardo agli appoggi A, B, pareggiare i momenti del peso in C della data sezione DC rappresentato da p riguardo agli stessi sostegni A, B: ma pe' principj della statica de' solidi il momento della parte del peso y che gravita sul sostegno

tegno A è $\frac{xy}{a}(a-x)$, che è uguale al momento di quella che gravita sul sostegno B, cioè $\left(\frac{a-x}{a}\right)y.x$; e così il momento della parte del peso p che gravita sul sostegno A è $\frac{mp}{a}(a-m)$, che è uguale al momento di quella che gravita sul sostegno B cioè $\left(\frac{a-m}{a}\right)p.m$; quindi perchè il solido ricercato AHhDlgGBA sostenuto nelle estremità A, B sia incurvabile dal proprio peso, dovrà essere conterminata la sua sezione verticale secondo la sua lunghezza dalla curva hDlg dell' equazione (A)

$$xy(a-x)=mp(a-m) \ldots\ldots\ldots (A)$$

Il che ec.

COROLLARJ.

I. Avendosi dall' equazione (A)

$$y=\frac{mp(a-m)}{x(a-x)}$$

è manifesto che se $x=0$, ovvero $x=a$, sarà $y=\infty$: dunque le estreme sezioni verticali AH, BG del solido incurvabile sono assintoti della curva hDlg da cui è conterminato, producendosi nelle estremità A, B all' infinito.

II. E poichè dalla stessa equazione (A) si ha

$$(a-x)x:(a-m)m=p:y$$

ne risulta, che le sezioni verticali bl, CD del solido incurvabile sono in reciproca ragione de' rettangoli de' respettivi segamenti Ab, bB, AC, CB della base AB, e che in conseguenza la minima sezione verticale corrisponde alla metà della stessa base.

III. La scoperta curva hDlg che costituisce il solido AHhDgGB incurvabile dal proprio peso è quella medesima con cui *Viviani* determinò la scala delle resistenze respettive delle sezioni in C, b ec. d'un solido cilindrico o prismatico forzato alla rottura da pesi pendenti alle sue estremità A, B, e sostenuto o in C, o in b ec., rappresentando le ordinate CD, bl ec. le resistenze delle stesse sezioni. Quindi ne segue la facile descrizione per punti della curva-

va *hDlg*, poichè costruita sulla base AB col vertice in D la parabola ADLB, sarà sempre *b*L a CD, così CD a *bl*.

IV. Se finalmente il determinato solido di cui HABGDH (fig. VI.) è la sezione verticale secondo la sua lunghezza conterminata dalle verticali AH, BG, dall' orizzontale AB e dalla sunnominata curva HDG, sia retto sopra sostegni o fondamenti in H e G, rimarrà egualmente esso quanto al suo peso incurvabile.

PROBLEMA III.

Determinare la figura della sezione verticale secondo la lunghezza d'un solido incurvabile, di cui la base AB sostenuta alle estremità A, B (fig. VII.) è inclinata all'orizzontale BE nell'angolo dato ABE.

Si supponga come innanzi che sia data la grossezza indicata dalla verticale DC, che dee avere il ricercato solido in un dato punto C, e da qualsivoglia altro punto *b* si conduca la verticale *bl*; e menate le *lr*, DR perpendicolari alla base AB, le orizzontali BE A*l'* incontrino le verticali DC, *lb* prolungate quanto occorre, ne' punti *b'*, *c*, *c'*, *l'*.

È evidente che presa al solito la base AB per un vette caricato in ogni suo punto come ne'C, *b* di pesi proporzionali alle sezioni verticali DC, *lb*, verrà gravata soltanto ne'suoi punti da forze o pesi agenti in direzione ad essa perpendicolare e proporzionali alle normali DR, *lr*, venendo sostenute le forze RC, *rb*, che colle dette DR, *lr* equivalgono alle verticali DC, *lb* dal sostegno inferiore B.

Siccome però i triangoli *lrb*, DRC, D*bb'*, DC*c*, A*l'b*, A*c'*C sono simili fra di loro; così la stessa equazione (A) scoperta nell' antecedente problema determina pure anche in questo caso la curva da cui dee essere conterminata la sezione del solido incurvabile ricercato colla differenza che le coordinate B*b*, *bl* saranno inclinate nell' angolo dato ABE. Il che ec.

SCO-

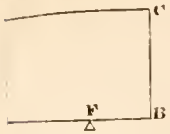
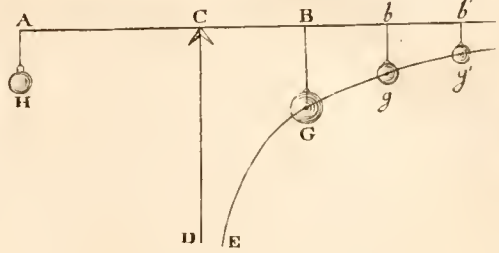
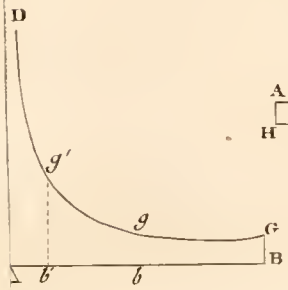


Fig. 2.





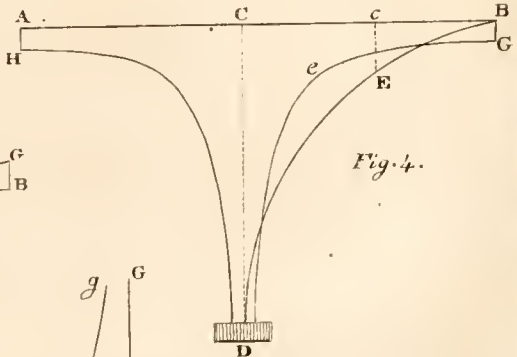
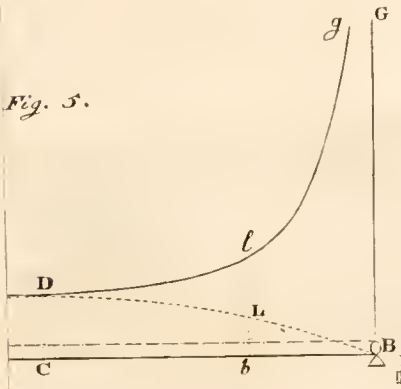


Fig. 4.

Fig. 5.



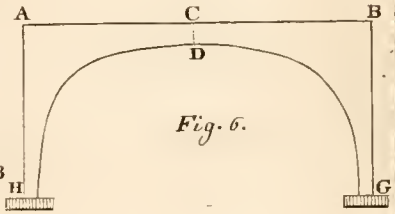
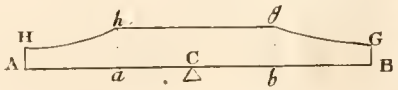


Fig. 6.

Fig. 8.



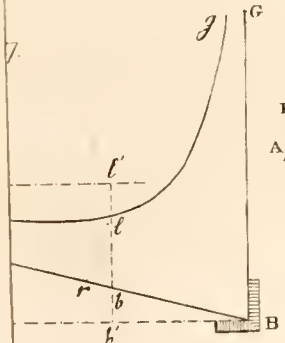
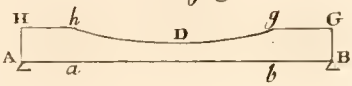


Fig. 9.



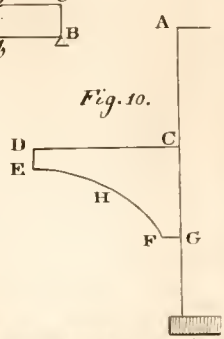


Fig. 1.

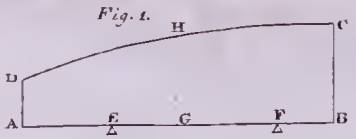


Fig. 2.

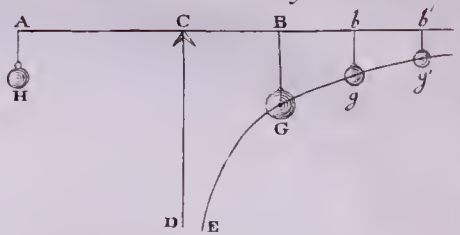
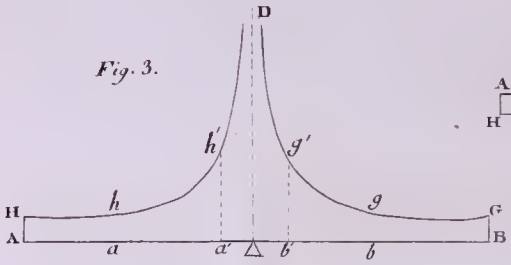


Fig. 3.



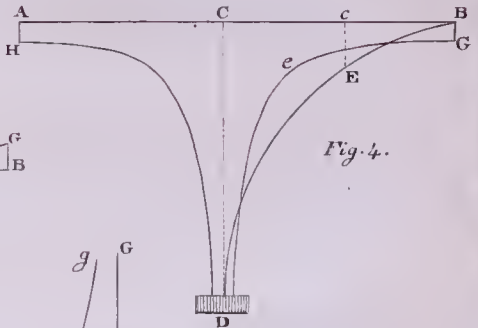
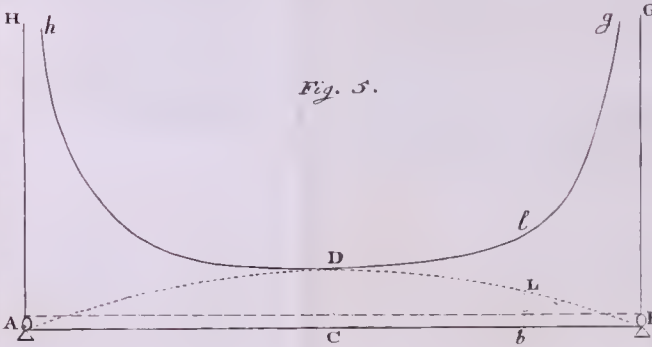


Fig. 4.

Fig. 5.



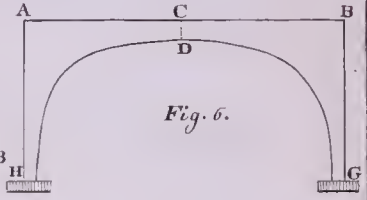


Fig. 6.

Fig. 7.

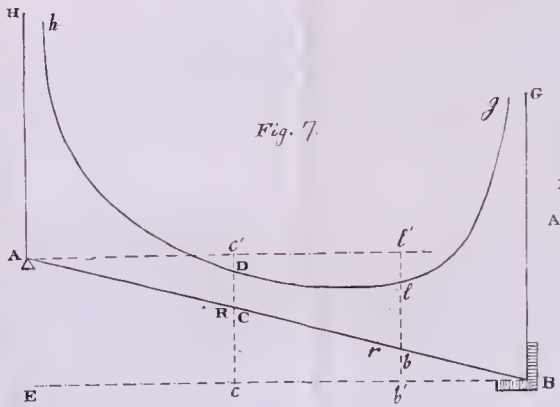


Fig. 8.

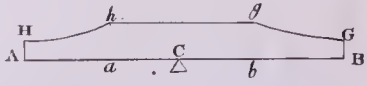


Fig. 9.

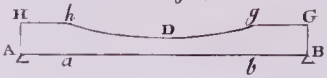
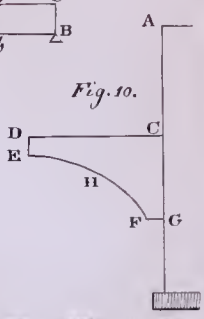


Fig. 10.



SCOLIO.

Benchè siasi veduto che le figure de' solidi incurvabili dal proprio peso vadino in parte conterminate da linee infinite, qualora sieno retti su d' uno o più punti della loro base piana: nondimeno nelle pratiche, nel primo caso, il solido può essere dotato della figura dimostrata dalla sezione ABG*gh*H, cioè avere le due porzioni A*ah*H, *b*BgG (fig. VIII.) estreme conterminate da rette linee, e da linee iperboliche essendo rettangolare la porzione di mezzo *abgh* in cui è più difficile l'incurvazione; e nel secondo la figura dimostrata dalla sezione ABG*g*D*h*H (fig. IX.), cioè avere le parti estreme A*ah*H, B*bg*G rettangolari, ed essere la parte di mezzo conterminata dalle rette *ha*, *ab*, *bg* e dalla porzione di curva *h*Dg dell' equazione (A) surriferita. Ad un solido in fine confitto con una estremità ad una muraglia converrebbe la figura prismatica rappresentata dalla sezione CDEHFG (fig. X.) conterminata dalle rette GF, GC CD, DE, e dall'arco iperbolico EHF.

SUL

SUL CALCOLO DELLE FUNZIONI RAZIONALI DELLE RADICI DI UNA DATA EQUAZIONE QUALUNQUE ALGEBRAICA DETERMINATA

Dotate della forma $f(x', x'', x''', \ldots . x^{(m)})$

MEMORIA

Di Pietro Abbati Modenese

Presentata da Paolo Ruffini li 17 *Luglio* 1804.

Data una qualunque equazione finita, intiera, e razionale

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + V = 0.$$

le di cui radici sieno designate mediante le x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$, siccome per la determinazione dei coefficienti di una sua trasformata qualunque, rendesi necessaria la determinazione del valore

$$f(x', x'', x''', \ldots\ldots, x^{(m)})$$

cioè una funzione delle stesse x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ tale per la forma, che resti sempre invariabile ad ogni loro permutazione; così per facilitarne la pratica ò creduto conveniente di accennar brevemente alcune regole per giungere alla determinazione del valore

$$\Sigma x^m x^n x^p x^q \ldots\ldots, x^u$$

col mezzo dell'altro Σx^k, che già sappiamo rinvenire mediante i coefficienti della data equazione. (1)

PRO-

(1) Non à guari leggendo per caso il primo ed unico tomo della Società di Mantova, vidi una elegantissima dimostrazione del Sig. Paoli di una formola del Sig. Eduardo Waring con cui nella sua *Miscellanea Analytica* avea già prima d' ora indicata la soluzione del nostro problema. Ora siccome la dimostrazione del Sig. Paoli poggia in gran parte sulla integrazione delle equazioni a differenze finite parziali, e può d'altronde riuscire di qualche vantaggio il conoscere delle regole per giungere alla soluzione dello stesso problema,

PROBLEMA.

Esprimere col mezzo del generale valore Σx^k quello di una qualunque funzione razionale delle x', x'', ec. dotata della forma

$$f(x', x'', \ldots\ldots x^{(m)})$$

ossia quello di

$$\Sigma x^m x^n x^p \ldots\ldots x^u$$

senza che perciò si renda necessaria la determinazione di $\Sigma x^m x^n$, $\Sigma x^m x^n x^p$, ec.

Alla soluzione del proposto problema premetto 1.° che il valore di una qualunque funzione razionale delle x', x'', ec. dotata della forma

$$f(x', x'', \ldots\ldots x^{(m)}) \quad (\S\ 3.\ \text{Ruffini Teor. Equaz.}^{\text{ni}})$$

potrà generalmente ridursi all'altro

$$\Sigma x^m x^n x^p \ldots\ldots x^u;$$

imperciocchè se la data funzione sia razionale, ed intiera, la cosa è chiara per se medesima; che se essa fosse fratta, dopo di averla ridotta allo stesso denominatore, ed ai minimi termini, la chiamerei $\frac{T'}{V'}$ ed in tale circostanza le T', V' sarebbero entrambe funzioni intiere, e razionali delle x', x'', ec. dotate della forma

$$f(x', x'', x''', \ldots\ldots x^{(m)})$$

e però ec. Che le T', V' siano entrambe funzioni delle x', x'', ec. della forma testè enunciata, si deduce dal considerare che in caso diverso, supposta la T' cangiarsi alle permutazioni fra le x', x'', ec. nelle T'', T''', ec. e così la V' rispettivamente nelle V'', V''', ec. sarà sempre vero, che

$$\frac{T'}{V'} = \frac{T''}{V''} = \frac{T'''}{V'''} = \text{ec.}$$

le quali sieno puramente fondate sulle nozioni che a noi fornisce la semplice Teoria delle Equazioni, così ò stimato non del tutto inutile la presente Memoria.

Ora le T', V' sono prime fra loro, dunque saranno le T'', T''', ec. multiple di T', e le V'', V''', ec. corrispondentemente equimultiple di V'; sarà per es.°

$$T'' = XT',\ V'' = XV';$$

ma le T'', V'' altro non sono in sostanza se non che le rispettive T', V' nelle quali siasi eseguita una data permutazione fra le x', x'', ec., dunque per la stessa ragione che la T', in quanto alla forma, non à verun comun divisore con V', la T''in quanto alla forma non avrà divisor comune con la V'', e però $X = 1$; donde $T' = T''$, $V' = V''$; e così $T' = T'' = T''' = \text{ec.}$, $V' = V'' = V''' = \text{ec.}$

2.° Che non mi sia disdetto di chiamar funzione, o valore del 1.° ordine il seguente Σx^m, del secondo ordine l'altro $\Sigma x^m x^n$, ec., ed in generale funzione, o valore dell'ordine μ^{esimo} la

$$\Sigma x^m x^n x^p x^q \ldots\ldots x^u$$

allorchè il numero delle m, n, p, q, ec., $u = \mu$; così di chiamar termini di una sola dimensione i seguenti Σx^m, Σx^n, ec., di due dimensioni gli altri $\Sigma x^m . \Sigma x^n$, Σx^{m+n}, di tre dimensioni gli altri $\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^p$, $\Sigma x^m . \Sigma x^{n+p}$, Σx^{m+n+p}; ec., ec., e premetto altresì nei termini di più dimensioni la distinzione di due sorta di fattori, chiamando *semplici*, o della *prima specie* i fattori di una sola dimensione come Σx^m, Σx^n, ec., *composti*, o della *specie seconda* i fattori della forma

$$\Sigma x^{m+n},\ \Sigma x^{m+n+p} \text{ ec.}$$

Tutto ciò premesso io rifletto che giungeremo senz'altro alla soluzione del nostro problema, qualora ci sia dato di stabilire le regole per la forma, segno, e coefficiente di ciascun termine del valore in quistione.

Quanto alla forma dei termini egli è chiaro che questa può diversificare in più modi avuto riguardo 1.° al numero delle dimensioni, 2.° al numero dei fattori, 3.° loro specie, 4.° alle diverse combinazioni delle m, n, p, ec. nei fattori stessi.

Osservando le formole

(H) $\Sigma x^m x^n = \Sigma x^n . \Sigma x^m - \Sigma x^{m+n}$

(I) $\Sigma x^m x^n x^p = \Sigma x^p . \Sigma x^m x^n - \Sigma x^n x^{m+p} - \Sigma x^m x^{n+p}$

(K)

(K) $\Sigma x^m x^n x^p x^q = \Sigma x^q . \Sigma x^m x^n x^p - \Sigma x^n x^p x^{m+q} - \Sigma x^m x^p x^{n+q} - \Sigma x^m x^n x^{p+q}$

ec. ec.

(L) $\Sigma x^m x^n x^p \ldots\ldots x^u = \Sigma x^u . \Sigma x^m x^n x^p \ldots\ldots - \Sigma x^n x^p \ldots\ldots$
$x^{m+u} - \Sigma x^m x^p \ldots\ldots x^{n+u} - \Sigma x^m x^n \ldots\ldots x^{p+u}$ — ec.

(Ruffini Teoria Equazioni 1°, 2°, 3°, 4°, § 41),

con la scorta delle nostre definizioni, e sul riflesso che i valori corrispondenti a $\Sigma x^m x^{n+p}$, $\Sigma x^n x^{m+p}$ possono ottenersi da quello con cui viene espresso l'altro $\Sigma x^m x^n$ collocando rispettivamente in luogo delle n, m, le $n+p$, $m+p$; che i valori corrispondenti alle $\Sigma x^m x^n x^{p+q}$, $\Sigma x^m x^p x^{n+q}$, $\Sigma x^n x^p x^{m+q}$ possono ottenersi da quello con cui si esprime l'altro $\Sigma x^m x^n x^p$ collocando rispettivamente in luogo delle p, n, m le $p+q$, $n+q$, $m+q$, ec. non sarà punto difficile di veder la ragione della seguente

REGOLA I.

„ Tutti i termini del nostro valore saranno di μ dimensioni, „ e però la diversità, che in quanto alla forma potrà incontrarsi „ passando dall'uno all'altro, dipenderà o dal numero, e specie „ dei fattori, o dalla diversa combinazione delle m, n, p, ec. nei „ fattori stessi „ .

Considerando poscia nelle suesposte formole che il valore $\Sigma x^m x^n$ dell'ordine secondo ci viene espresso col mezzo di due termini formati l'uno da due fattori, l'altro da uno solo; che però il valore $\Sigma x^m x^n x^p$ dell'ordine terzo, qualora siasi prima ridotto ad essere espresso mediante il generale valore Σx^k di 1.° ordine, sarà un aggregato di varii termini parte dei quali saranno formati di tre fattori, parte di due, e parte di un solo, che però ec., ec., chiara vedremo la ragione della seguente

REGOLA II.

„ Nel richiesto valore alcuni termini saranno formati di μ „ fattori, altri di $\mu-1$, altri di $\mu-2$, ec., ed in generale formati

„ formati da un numero $\mu - \nu$ di fattori essendo $\iota = 0, 1, 2, 3,$
„ ec., $\mu - 1$ „

Nel valore per es. di $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r x^s$ ove $\mu=6$, alcuni termini saranno composti di sei fattori come lo è

$$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^p . \Sigma x^q . \Sigma x^r . \Sigma x^s,$$

altri di cinque come il termine

$$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^p . \Sigma x^q . \Sigma x^{r+s},$$

altri di quattro come i termini

$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^p . \Sigma x^{q+r+s}$, $\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q} . \Sigma x^{r+s}$,

altri di tre ec. ec.

Chiamo $X^{(\mu)}$ il complesso dei termini formati da un numero di fattori $= \mu$, $X^{(\mu-1)}$ il complesso dei termini formati da un numero di fattori $= \mu - 1$; ec., ed in generale $X^{(\mu-\nu)}$ il complesso dei termini formati da un numero di fattori $= \mu - \nu$; in questa supposizione è chiaro, che la soluzione del problema dipenderà dallo stabilire un metodo generale per la determinazione della quantità $X^{(\mu-\nu)}$.

Dico *termini fra loro simili* nel complesso $X^{(\mu-\nu)}$ quelli che vengono formati da un egual numero di fattori della prima, e da un egual numero di fattori della seconda specie, essendo questi rispettivamente dotati delle stesse dimensioni, *dissimili* poscia chiamo *fra loro quei termini* del complesso $X^{(\mu-\nu)}$, i quali non godono delle anzidette particolarità; per esempio essendo $\mu=6$ e $\nu=2$ saranno simili di quattro fattori i termini

$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q} . \Sigma x^{r+s}$, $\Sigma x^m . \Sigma x^q . \Sigma x^{n+p} . \Sigma x^{r+s}$, ec.,

dissimili saranno gli altri

$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^p . \Sigma x^{q+r+s}$, $\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q} . \Sigma x^{r+s}$.

Uniseo tutti i termini fra loro simili nel complesso $X^{(\mu-\nu)}$ distinguendone mediante le

$$X_1^{(\mu-\nu)}, X_2^{(\mu-\nu)}, X3^{(\mu-\nu)}, \text{ec.}$$

le rispettive somme così che sia

$$X^{(\mu-\nu)} = X_1^{(\mu-\nu)} + X_2^{(\mu-\nu)} + X3^{(\mu-\nu)} + \text{ec.}$$

Trattasi ora di determinare il numero delle $X_1^{(\mu-\nu)}$, ec. non che i termini che le compongono.

Quan-

Quanto al numero delle $X1^{(\mu-\nu)}$, ec. io rifletto, che posto $\nu=0$, siccome in tal caso la forma dei termini composti di μ fattori non può mai supporsi diversa dalla seguente

$$\Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^p \ldots\ldots \Sigma x^u,$$

così per la (regola 2.) precedente un tal termine dovrà sempre rinvenirsi fra quelli, che andiamo cercando. Essendo poi la ν diversa dallo zero, cioè $\nu=1, 2, 3$, ec., in tale ipotesi prima di stabilire le regole generali per la determinazione del numero delle $X1^{(\mu-\nu)}$, ec. e della forma comune ai loro termini rispettivi, prendiamo un esempio onde facilitarne l' intelligenza, e farne nel tempo stesso vedere una chiara dimostrazione. Sia dunque $\mu=6, \nu=2$, così che del valore

$$\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r x^s .$$

dell'ordine sesto si cerchi il numero delle $X1'^{v}$, $X2'^{v}$, ec., ec. e la forma comune ai loro termini. In tal caso io osservo che il termine

$$\Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^p.\Sigma x^{q+r+s}$$

dovrà certamente rinvenirsi nell'espressione del nostro valore, mentre in caso diverso essendo per la formola (L)

$\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r x^s = \Sigma x^r.\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r - \Sigma x^m x^n x^p x^q x^{r+s} - \Sigma x^m x^n x^p x^r x^{q+s}$ — ec.

ed essendo $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^{r+s}$ = al valore con cui viene espressa la $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r$ purchè in essa in luogo di r costantemente si collochi $r+s$, ne verrebbe, che nemmeno il termine

$$\Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^p.\Sigma x^{q+r}$$

potesse far parte del valore $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r$, e per una ragione affatto simile ne verrebbe che il termine

$$\Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^p.\Sigma x^q$$

dovesse escludersi dall' espressione del valore di $\Sigma x^m x^n x^p x^q$; ma ciò sarebbe contrario alla (regola 2.); dunque ec. Nello stesso modo si dimostra che il termine

$$\Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^{p+q}.\Sigma x^{r+s}$$

dovrà certamente ritrovarsi nell'espressione del valore in quistione, d'onde concluderemo che due saranno le somme dei termini simili composti di quattro fattori nel dato valore $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r x^s$ per cui faremo

$$X'^{v} = X1'^{v} + X2'^{v}$$ chia-

chiamando per es. $X1'^{\nu}$ la somma dei termini di forma simili al primo $\Sigma x^{m}.\Sigma r^{n}.\Sigma x^{p}.\Sigma x^{q+r+t}$, ed $X2'^{\nu}$ la somma dei termini di forma simili al secondo $\Sigma r^{m}.\Sigma x^{n}.\Sigma x^{p+q}.\Sigma x^{r+t}$.

Generalizzando col pensiero il discorso fatto nell' esempio precedente, facilmente vedremo come in qualunque ipotesi delle μ, ν sarà sempre vero, che 1.° per la determinazione del numero delle $X1^{(\mu-\nu)}$, ec. si potrà stabilire la seguente

REGOLA III.

„ Determinate tutte le soluzioni sostanzialmente diverse di
„ cui è suscettibile il problema: *dividere il numero intero* μ *in*
„ $\mu-\nu$ *parti intiere non* < 1, (1) facciasi il numero delle $X1^{(\mu-\nu)}$,
„ ec. uguale a quello delle anzidette soluzioni ν.

Nell'es. precedente ove $\mu = 6$, $\nu = 2$ abbiamo

$$X'^{\nu} = X1'^{\nu} + X2'^{\nu}$$

giacchè in due soli modi puossi dividere il numero 6 in quattro parti intiere non < 1; primo facendo tre delle anzidette parti uguali ciascuna all'unità, e la rimanente uguale a tre. Secondo facendo due delle parti stesse uguali all'unità, e le rimanenti uguali ciascuna a due.

2.° Che per la determinazione della forma comune dei termini delle rispettive somme $X1^{(\mu-\nu)}$, ec. si potrà stabilire la

REGOLA IV.

„ La forma comune ai termini delle somme $X1^{(\mu-\nu)}$, ec. si
„ po-

(1) Per conoscere a colpo d'occhio il numero delle soluzioni di cui è suscettibile l'indicato problema, si consulti il capo XVI dell' *Introductio in Analysim infinitorum* del Signor Euler, dal quale sarà facile di rilevare il modo di continuare quanto si voglia la tabella citata al §.° 318, e col soccorso di lei ottenere quanto si desidera.

„ potrà determinare col prendere, come per modulo, per ciascu-
„ na $X_1^{(\mu-\nu)}$, ec. una diversa soluzione del problema citato alla
„ (prec. regola 3.), e col fare in quella la forma comune ai suoi
„ termini composta di tanti fattori della prima specie, quante so-
„ no in questa le parti uguali all'unità, e così di tanti fattori
„ della specie seconda di due, tre, ec. dimensioni, quante sono
„ nella citata soluzione le parti uguali al due, tre, ec. „

Determinate le forme dei termini delle rispettive somme $X_1^{(\mu-\nu)}$, ec., osserviamo in esse cosa nasca dalla permutazione delle $m, n, p, \ldots u$ fra loro. A tale effetto presa per es. la forma

$$\Sigma x^m . \Sigma x^{n+p} . \Sigma x^{q+r} . \Sigma x^{s+\cdots+u}$$

vedo che permutando fra loro reciprocamente le due lettere n, p, o le due q, r avremo.

$$\Sigma x^m . \Sigma x^{n+p} . \Sigma x^{q+r} . \Sigma x^{s+\cdots+u} = \Sigma x^m . \Sigma x^{p+n} . \Sigma x^{q+r} . \Sigma x^{s+\cdots+u} =$$
$$\Sigma x^m . \Sigma x^{n+p} . \Sigma x^{r+q} . \Sigma x^{s+\cdots+u},$$

vedo che lo stesso succede permutando fra loro reciprocamente i due fattori Σx^{n+p}, Σx^{q+r}, onde

$$\Sigma x^m . \Sigma x^{n+p} . \Sigma x^{q+r} . \Sigma x^{s+\cdots+u} = \Sigma x^m . \Sigma x^{q+r} . \Sigma x^{n+p} . \Sigma x^{s+\cdots+u}$$

ec.; finalmente osservo, che saranno uguali tutti i valori nati dalle possibili permutazioni delle $s, t, \ldots . u$ fra loro. Ora siccome per mezzo di opportuni coefficienti numerici possiamo sempre unire assieme i termini uguali, e siccome possiamo qui rinovare il discorso poc'anzi fatto per istabilire la regola 3.ª, e sappiamo d'altronde che il valore in quistione esser deve una funzione delle x', x'', ec. $x^{(m)}$ della forma

$$f(x', x'', x''', \ldots x^{(m)});$$

così non tenendo conto se non se dei generalmente disuguali per la loro determinazione stabiliremo la seguente

REGOLA V.

„ Facciansi nelle rispettive forme dei termini componenti
„ le somme $X_1^{(\mu-\nu)}$, ec. tutte le possibili permutazioni delle μ
„ let-

„ lettere m, n, p, ec. u capaci di darci dei risultati generalmen-
„ te disuguali, e questi scrivansi l'un dietro l'altro col segno $+$
„ fra due parentesi „ .

Se, volendo esser certi di non aver omessa qualche permutazione si addomandasse il preciso numero degli indicati risultati, in tal caso chiamate a, b, ec., g delle $\mu - \nu$ parti intiere del numero μ le diverse dall'unità, se con le α, β, γ, ec. esprimeremo il rispettivo numero di quelle che fra le indicate quantità assieme si uguagliano, e supporremo

$$a + b + c + \ldots + g = h,$$

dalla teoria delle combinazioni è chiaro che l'otterremo espresso dalla formola

$$(A) \quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mu-h+1)}{1.2.3\ldots a.1.2.2.3\ldots b\ldots 1.2.3\ldots g.1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta\ldots}$$

Dunque nell'es. preparatorio alla regola 3.ª, essendo per la forma dei termini componenti la somma $X_{1^{IV}}$, $\mu = 6$, $a = h = 3$, α, β, ec. $= 1$; sarà il loro numero $= \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$, e saranno

$$\Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^p.\Sigma x^{q+r+s}, \quad \Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^q.\Sigma x^{p+r+s}$$
$$\Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^r.\Sigma x^{p+q+s}, \quad \Sigma x^m.\Sigma x^n.\Sigma x^s.\Sigma x^{p+q+r}$$
$$\Sigma x^m.\Sigma x^p.\Sigma x^q.\Sigma x^{n+r+s}, \quad \Sigma x^m.\Sigma x^p.\Sigma x^r.\Sigma x^{n+q+s}$$
$$\Sigma x^m.\Sigma x^p.\Sigma x^s.\Sigma x^{n+q+r}, \quad \Sigma x^m.\Sigma x^q.\Sigma x^r.\Sigma x^{n+p+s}$$
$$\Sigma x^m.\Sigma x^q.\Sigma x^s.\Sigma x^{n+p+r}, \quad \Sigma x^m.\Sigma x^r.\Sigma x^s.\Sigma x^{n+p+q}$$
$$\Sigma x^n.\Sigma x^p.\Sigma x^q.\Sigma x^{m+r+s}, \quad \Sigma x^n.\Sigma x^p.\Sigma x^r.\Sigma x^{m+q+s}$$
$$\Sigma x^n.\Sigma x^p.\Sigma x^s.\Sigma x^{m+q+r}, \quad \Sigma x^n.\Sigma x^q.\Sigma x^r.\Sigma x^{m+p+s}$$
$$\Sigma x^n.\Sigma x^q.\Sigma x^s.\Sigma x^{m+p+r}, \quad \Sigma x^n.\Sigma x^r.\Sigma x^s.\Sigma x^{m+p+q}$$
$$\Sigma x^p.\Sigma x^q.\Sigma x^r.\Sigma x^{m+n+s}, \quad \Sigma x^p.\Sigma x^q.\Sigma x^s.\Sigma x^{m+n+r}$$
$$\Sigma x^p.\Sigma x^r.\Sigma x^s.\Sigma x^{m+n+q}, \quad \Sigma x^q.\Sigma x^r.\Sigma x^s.\Sigma x^{m+n+p}.$$

Determinati in tal modo i termini del nostro valore egli è chiaro, che alla completa soluzione del nostro problema altro più non resta se non se di stabilire le regole onde conoscere i segni, e i coefficienti dei medesimi.

Pre-

Presa in maturo esame la formola (L) ove il valore

$$\Sigma\, x^m\, x^n\, x^p \ldots\ldots x^u$$

dell' ordine *μesimo* ci viene espresso col mezzo di tanti valori tutti dell' ordine $(\mu-1)$*esimo* presi negativamente a riserva d' un solo preso col proprio segno, e moltiplicato per un altro valore dell' ordine primo, sarà facile di rilevare, fatto $\mu'=\mu-1$, che se riguardo ai termini della somma $X^{(\mu'-\nu')}$ si verifichi generalmente la regola, *che essendo ν' pari abbiano essi il segno* +, *ed essendo ν' dispari abbiano il segno* —, una tal regola dovrà eziandio verificarsi per rapporto ai termini della somma $X^{(\mu-\nu)}$; imperciocchè quanto ai valori dell'ordine $(\mu-1)$*esimo*, ossia dell' ordine *μesimo*, i quali nella equazione (L) costituiscono fuor del primo tutti i termini del suo secondo membro, egli è chiaro, per la fatta supposizione, che ponendo $\mu-1$ in luogo di μ' nella somma generale $X^{(\mu'-\nu')}$, avremo i termini della somma $X^{(\mu'-1-\nu')}$ dotati di segno + allor chè ν' sia pari, e dotati di segno — allorchè ν' sia dispari, ossia dotati di segno + allorchè $\nu'+1$ sia dispari, e vice versa di segno — allorchè $\nu'+1$ sia pari; fatto ora $\nu'+1=\nu$ sarà

$$X^{(\mu-1-\nu')} = X^{(\mu-\nu)},$$

e siccome per la formola (L) tutti i termini dell'ordine μ'*esimo* da noi considerati si devono prendere col segno cangiato, così si vede che ec. Per ciò poi che riguarda il primo termine del secondo membro dell' equazione (L), essendo questi un prodotto formato di due valori uno del primo, l'altro dell'ordine μ'*esimo* da prendersi col proprio segno, ne viene, che siccome per la fatta supposizione, posto $\mu-1$ in luogo di μ' nella somma generale $X^{(\mu'-\nu')}$ abbiamo i termini tutti della somma $X^{(\mu-1-\nu')}$ dotati di segno positivo o negativo, secondo che pari o dispari sarà il numero ν', così in grazia delle definizioni date aggiungendo il fattore di 1.° ordine avremo i termini espressi dalla somma generale $X^{(\mu-1+1-\nu')}$ dotati di segno +, o − secondo che sarà pari o dispari il numero ν'

ossia il numero $(-1+1-\nu')$; dunque supposto $(-1+1-\nu')=-\nu$ si vede che ec.

Ora supposto $\mu=1$ abbiamo il valor generale di 1.° ordine

$$\Sigma x^m = + \Sigma x^m ,$$

dunque fatto col pensiero di mano in mano $\mu=2, 3, 4$, ec. sarà facile di rilevare rapporto ai segni la seguente

REGOLA VI.

„ Il complesso $X^{(\mu-\nu)}$ ossia tutti i termini formati di $(\mu-\nu)$ fat-
„ tori avranno il segno positivo, o negativo secondo che il nume-
„ ro ν sarà *pari* o *dispari* „ .

Dunque nell' esempio preparatorio alla (reg.ª 3.ª), in cui $\mu=6$, $\nu=2$, tutti i termini del complesso $X^{1\nu}$, ossia delle due somme $X1^{1\nu}$, $X2^{1\nu}$ saranno affetti del segno + .

Finalmente per rapporto ai coefficienti io rifletto, che tutti i termini simili saranno necessariamente dotati dello stesso coefficiente, mentre in caso diverso non potendo il valore rinvenuto, generalmente parlando, addivenire una funzione delle radici della data equazione della forma

$$f\left(x', x'', x''', \ldots\ldots x^{(m)}\right)$$

non sarebbe capace di esprimere quello di

$$\Sigma x^m x^n x^p \ldots\ldots x^u = f\left(x', x'', x''', \ldots\ldots x^{(m)}\right) .$$

Dunque tanto i segni quanto i coefficienti dovranno apporsi alle somme $X1^{(\mu-\nu)}$, $X2^{(\mu-\nu)}$, ec., ed ecco il motivo per cui alla (Regola V) abbiamo suggerito di collocare i rispettivi loro termini fra mezzo a due parentesi l' un dietro l' altro col segno + .

Ciò posto, siccome alla spedita comprension delle cose meglio giovan gli esempj di tutti i discorsi astratti e generali, così chiamati C1, C2, C3, ec. i rispettivi coefficienti delle somme $X1^{(\mu-\nu)}$, $X2^{(-\nu)}$, $X3^{(\mu-\nu)}$, ec., prima di stabilire la regola generale per la loro determinazione, osserviamo alcuni casi particolari sia per fa-

facilitare l' intelligenza della nominata regola, sia per farne nel tempo stesso travedere una esatta dimostrazione. Sia dunque che del valore

$$\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r x^s$$

vogliansi determinare i rispettivi coefficienti dei termini dotati delle forme

1.ª $\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^p . \Sigma x^q . \Sigma x^r . \Sigma x^s$,

2.ª $\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q+r+s}$

3.ª $\Sigma x^{m+n+p} . \Sigma x^{q+r+s}$.

In tal caso per ciò che concerne quelli della prima fra le indicate forme, osservata la formola (L), ossia l' equazione,

$$\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r x^s = \Sigma x^s . \Sigma x^m x^n x^p x^q x^r - \Sigma x^n x^p x^q x^r x^{m+s} - \Sigma x^m x^p x^q x^r x^{n+s}$$
$$- \Sigma x^m x^n x^q x^r x^{p+s} - \Sigma x^m x^n x^p x^r x^{q+s} - \Sigma x^m x^n x^p x^q x^{r+s},$$

sarà facile di rilevare che essi formeranno parte del solo valore

$$\Sigma x^s . \Sigma x^m x^n x^p x^q x^r .$$

Ora dalla stessa formola (L) abbiamo

$$\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r = \Sigma x^r . \Sigma x^m x^n x^p x^q - \Sigma x^n x^p x^q x^{m+r} - \text{ec};$$

Dunque i termini dotati della forma da noi supposta saranno uguali al prodotto di Σx^s per una parte del solo valore $\Sigma x^r . \Sigma x^m x^n x^p x^q$. Proseguendo in tal guisa giungeremo finalmente alla determinazione del richiesto coefficiente, il quale sarà $= 1$.

Così dalla stessa formola (L), e dal valore testè rinvenuto di $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r x^s$ io vedo che i termini dotati della seconda forma formeranno parte dei soli

$$\Sigma x^m x^n x^q x^r x^{p+s}, \Sigma x^m x^n x^p x^r x^{q+s}, \Sigma x^m x^n x^p x^q x^{r+s}.$$

Ora queste quantità come è chiaro si possono immediatamente ottenere dal valore con cui viene espressa la $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r$, collocandovi rispettivamente in luogo delle p, q, r, le $p+s$, $q+s$, $r+s$; dunque chiamato C' il coefficiente del termine dotato della forma

$$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q+r}$$

nel valore di $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r$, siccome sono fra loro uguali i termini

$$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+s+q+r} = \Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q+s+r} = \Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q+r+s}$$

avremo il richiesto coefficiente uguale a

$$3\,C' = (4-1)\,C'$$

Nella stessa maniera proveremo, che il coefficiente C' del termine dotato della forma

$$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q+r}$$

nel valore di $\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r$ sarà uguale a

$$(3-1)C'' = (4-2)\,C''$$

essendo C'' il coefficiente del termine dotato della forma

$$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^{p+q}$$

nel valore di $\Sigma x^m\ x^n\ x^p\ x^q$.

Così finalmente proveremo che

$$C'' = (2-1)\,C''' = (4-3)C^{IV}$$

essendo C''' il coefficiente del termine dotato della forma

$$\Sigma x^m . \Sigma x^n . \Sigma x^p$$

nell' espressione del valore di $\Sigma x^m x^n x^p$. Ora dall' es.prec. sappiamo che C''=1 ; dunque avremo

$(4-1)C' = (4-1)(4-2)C'' = (4-1)(4-2)(4-3)C''' = (4-1)(4-2)(4-3)$

per la richiesta espressione del nostro coefficiente .

Dai precedenti esempj sarà facile di rilevare che il coefficiente dei termini dotati della terza forma da noi proposta sarà $= (3-1)\,(3-2)\,(3-1)\,(3-2)$.

Veduto il modo onde determinare il rispettivo coefficiente dei termini dotati delle tre forme da noi supposte, cerchiamo ora come si possa determinar quello di un termine dotato della forma generale

$$\Sigma x^{m'+m''+m'''+\ldots+m^{(a)}} \Sigma x^{n'+n''+\ldots+n^{(b)}} \Sigma x^{p'+p''+\ldots+p^{(c)}}$$

di un dato valore dell'ordine *μesimo*, nella supposizione cioè che $a+b+c+\text{ec.} = \mu$.

Presa in tal caso l'equazione (formola L)

$$\Sigma x^{m'} x^{m''} \ldots x^{m^{(a)}}\ x^{n'} \ldots . x^{n^{(b)}} \ldots \ldots \ldots$$

$$= \Sigma x^{m^{(a)}} \Sigma x^{m'} x^{m''} \ldots x^{m^{(a-1)}}\ x^{n'} x^{n''} \ldots . x^{n^{(b)}} \ldots . \text{—ec.—ec.}$$

$$\Sigma - x^{n'} x^{n''} \ldots x^{n^{(b)}} \ldots \ldots x^{m''} x^{m'''} \ldots \ldots x^{m^{(a-1)}}\ x^{m'+m^{(a)}}$$

$$- \Sigma x^{n'} x^{n''} \ldots x^{n^{(b)}} \ldots\ldots x^{m'} x^{m'''} \ldots\ldots x^{m^{(a-1)}} x^{m''+m^{(a)}}$$

$$- \Sigma x^{n'} x^{n''} \ldots x^{n^{(b)}} \ldots\ldots x^{m'} x^{m''} x^{m^{iv}} \ldots\ldots x^{m^{(a-1)}} x^{m'''+m^{(a)}}$$

$$- \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

primieramente io rifletto che se le a, b, c, ec. sono tutte $= 1$, sarà facile di dimostrare in una maniera affatto simile a quella indicata nel 1.° esempio precedente, come in tal caso il richiesto coefficiente sarà $= 1$. Che se poi 2.° tutte, o porzione delle a, b, c, ec. fossero > 1; supposto in primo luogo $a > 1$, facilmente si vede che il nostro termine non potrà mai far parte se non se degli $(a-1)$ valori dell' ordine $(\mu-1)esimo$

$$\Sigma x^{n'} x^{n''} \ldots x^{n^{(b)}} \ldots\ldots x^{m''} x^{m'''} \ldots\ldots x^{m^{(a-1)}} x^{m'+m^{(a)}}$$

$$\Sigma x^{n'} x^{n''} \ldots x^{n^{(b)}} \ldots\ldots x^{m'} x^{m'''} \ldots\ldots x^{m^{(a-1)}} x^{m''+m^{(a)}}$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

Ora questi valori possono sempre ottenersi da quello, con cui viene espresso l' altro generale dell' ordine $(\mu-1)esimo$

$$\Sigma x^{m'} x^{m''} \ldots x^{m^{(a-1)}} x^{n'} x^{n''} \ldots\ldots x^{n^{(b)}} \ldots\ldots$$

purchè in esso in luogo delle m', m'', ec. $m^{(a-1)}$ venghino rispettivamente collocate le $m'+m^{(a)}$, $m''+m^{(a)}$, ec. $m^{(a-1)} + m^{(a)}$. Dunque chiamato C' il coefficiente del termine dotato della forma

$$\Sigma x^{m'+m''+m'''+\ldots+m^{(a-1)}} \Sigma x^{n'+n''+\ldots+n^{(a)}} \ldots\ldots\ldots$$

nell' espressione testè indicata è chiaro che l' addomandato coefficiente sarà $= (a-1)\,C'$.

Nello stesso modo vedremo che

$$C' = (a-2)\,C''$$

essendo C'' = al coefficiente del termine dotato della forma

$$\Sigma x^{m'+m''+\ldots+m^{(a-2)}} \Sigma x^{n'+n''+\ldots+n^{(b)}} \ldots\ldots\ldots$$

nell' espressione del valor generale dell' ordine $(\mu-2)esimo$

Σ

$$\Sigma x^{'m} x^{''m} \ldots x^{m^{(a-2)}} x^{'n} x^{''n} \ldots . x^{n^{(b)}} \ldots .$$

Nello stesso modo, ec. ec., e finalmente vedremo che

$$C^{(a-2)} = (a-a+1)\, C^{(a-1)} = 1 \,.\, C^{a-1)}$$

ove $C^{(a-1)}$ esprime il coefficiente del termine dotato della forma

$$\Sigma x^{'m} . \Sigma x^{'n+''n+} \ldots + n^{(b)} \ldots \ldots .$$

nell' espressione del valore generale dell' ordine $(a-a+1)esimo$

$$\Sigma x^{'m} x^{''n} x^{'''n} \ldots x^{n^{(b)}} \ldots \ldots .$$

Proseguendo col medesimo raziocinio nella supposizione di $b>1$, in quella di $c>1$, ec. e finalmente di $g>1$, vedremo che l'addomandato coefficiente verrà espresso dalla formola

$$(a-1)(a-2) \ldots . (1)(b-1)(b-2) \ldots . (1)(c-1)(c-2) \ldots .$$
$$(1) \ldots . (g-1)(g-2) \ldots . (1) C^{(a-1+b-1+\text{ec.})}$$

essendo $C^{(a-1+b-1+\text{ec.}+g-1+\text{ec.})}$

il coefficiente del termine dotato della forma

$$\Sigma x^{'m} . \Sigma x^{'n} . \Sigma x^{'p} \ldots \ldots .$$

nell' espressione del valor generale dell' ordine

$$(\mu-a+1-b+1-\cdots\cdots-g+1)esimo$$

$$\Sigma x^{''m} x^{'n} x^{'p} \ldots .$$

Ora per la prima precedente riflessione

$$C^{(a-1+b-1+\text{ec.}+g-1)} = \ldots .$$

Dunque per la determinazione del richiesto coefficiente stabiliremo la seguente

REGOLA VII.

„ Essendo la formola (A) l' espressione del numero dei ter-
„ mini generalmente disuguali componenti una data somma
„ $X_1{}^{(\mu-\nu)}$, ec. avremo la formola

(B) „ $(a-1)(a-2) \ldots (1)(b-1)(b-2) \ldots (1) \ldots (g-1)(g-2) \ldots (1)$

„ per

„ per l' espressione generale del suo coefficiente; determinere-
„ mo cioè il coefficiente di una data somma $X_1^{(\mu-\nu)}$, ec. osser-
„ vando la forma comune ai suoi termini, e deducendolo in
„ modo speciale dal numero delle dimensioni dei fattori della
„ seconda specie di cui sarà dessa composta, avuto però riguar-
„ do, che se questi mancassero, in tal caso il coefficiente cercato
„ sarà $= 1$ „.

Dalle regole fin quì stabilite sarà facile, data una qualunque

$$\Sigma x^m x^n x^p \ldots x^u$$

per es. la

$$\Sigma x^m x^n x^p x^q x^r x^t$$

di determinarne il valore espresso per mezzo dell' altro generale di 1.° ordine Σx^k, costruendo all' uopo una tabella simile alla seguente, nella quale appunto ô cercato di epilogare le regole stesse.

OP-

OPPOSIZIONE

D' URANO OSSERVATA NEL 1795.

Da Giuseppe Slop de Cademberg

Ricevuta il dì 19. *Luglio* 1804.

Il cielo costantemente coperto non lasciò vedere Urano al quadrante murale che il dì 3 Marzo, cioè dodici giorni dopo seguita l'opposizione; vi fu dunque osservato in quella notte e nella susseguente insieme con il Cuor del Leone, i di cui luoghi apparenti tratti da differenti cataloghi sono quì esposti per il giorno 3 dell'istesso mese. È necessario avvertire che si è tenuto conto della diminuzione annua o″, 41 in ascension retta, che il Maskelyne dà a questa stella nella spiegazione delle tavole premessa al suo primo volume d'osservazioni astronomiche, e dell' annuo accrescimento o″, 31 in declinazione datogli da la Lande nella *connoissance des temps* del 1796, correzioni che nascono dal moto proprio di questa stella. Nel nostro calcolo ci siamo serviti dei luoghi dedotti dal Catalogo di Maskelyne.

Dal Catalogo delle stelle zodiacali di Mayer.

α del Leone, Ascensione retta - - - - - 4ʰ 29° 21′ 39″, 9
Declinazione Boreale - - - - - o 12 57 52, 3

Dal Catalogo di Bradley.

α del Leone, Ascensione retta - - - - - 4 29 21 44, 6
Declinazione Boreale - - - - - o 12 57 51, 3

Dal Catalogo di La Caille delle Stelle zodiacali.

α del Leone, Ascensione retta - - - - - 4 29 21 43, 6
Declinazione Boreale - - - - - o 12 57 57, 6

Dal Catalogo di Maskelyne.

α del Leone, Ascensione retta - - - - - 4 29 21 40, 2
Declinazione Boreale - - - - - o 12 57 46, 6

Il

Il dì 3 Marzo t. m. ore 11 25′ 29″.

Differenza osservata fra Urano e σ del Leone.

In Ascensione retta - - - - - - - -	+	0′	3° 38′	57″, 4
In Declinazione - - - - - - - - - -	—	0	0 57	53, 0
L'istessa corretta dalla refrazione - -	—	0	0 57	44, 3

Luoghi apparenti d'Urano.

Ascension retta - - - - - - - - - -	5	3	0	37, 6
Declinazione Boreale - - - - - - - -	0	11	59	52, 3
Longitudine - - - - - - - - - -	5	0	39	28, 0
Latitudine Boreale - - - - - - - -	0	0	47	53, 5
Aberrazione in longitudine - - - - -	—	0	0	0 14, 9
Nutazione in longitudine - - - - -	+	0	0	0 13, 5
Longitudine vera d'Urano - - - - - -	5	0	39	26, 6
Longitudine geocentrica dedotta dalle tavole del Ch. Lambre - - - - - - - -	5	0	39	19, 9
Latitudine geocentrica Boreale - - - - -	0	0	47	52, 0
Differenza di quelle tavole dall'osservazione nella longitudine - - - - - - - -	—	0	0	0 6, 7
Differenza nella latitudine - - - - -	—	0	0	0 1, 5

Il dì 4 Marzo t. m. ore 11. 21′ 24″

Differenza osservata fra Urano e σ del Leone.

Nell'Ascension retta - - - - - - -	+	0	3	36 34, 6
Nella Declinazione - - - - - - - -	—	0	0	56 54, 0
L'istessa corretta dalla refrazione - -	—	0	0	56 55, 3

Luoghi apparenti d'Urano.

Ascensione retta - - - - - - - - -	5	2	58	14, 8
Declinazione Boreale - - - - - - - -	0	12	0	51, 3
Longitudine - - - - - - - - - -	5	0	36	56, 5
Latitudine Boreale - - - - - - - -	0	0	47	59, 1
Aberrazione in longitudine - - - - -	—	0	0	0 14, 8
Nutazione in longitudine - - - - -	+	0	0	0 13, 5
Longitudine vera d'Urano - - - - - -	5	0	36	55, 2
Longitudine secondo le tavole - - - -	5	0	36	47, 9
Latitudine Boreale - - - - - - - -	0	0	47	51, 8

Differenza delle tavole dall'osservazione nella
longitudine - - - - - - - - - — 0′ 0° 0′ 7″, 3
Differenza nella latitudine - - - - - — 0 0 0 7 , 3

Da tutto questo risulta la differenza media in longitudine — 7″, 0, ed in latitudine — 4″, 4, quali differenze si avranno assumendo la longitudine osservata per il dì 3. Marzo 5′ 0° 39′ 28″, 3 e la latitudine boreale 47′ 56″, 4. La longitudine del Sole dedotta dalle tavole di Lambre era in quel tempo 11′ 13° 23′ 2″, 2, onde col moto relativo del Sole da Urano era già stato descritto un arco di gradi 12 43′ 33″, 9 dopo dell'opposizione apparente. Quest' arco secondo il moto geocentrico d' Urano di 32′ 8″, 6 e del Sole 12° 11′ 25″, 4 ricavati ambedue dalle tavole del Lambre fra il 3. Marzo ore 11 25′ 29″, e il 19. Febbrajo ore 7 57′ 34″ di tempo medio vien descritto in giorni 12 ore 3 27′ 53″, onde l' opposizione apparente seguì il 19. Febbrajo a ore 7 57′ 36″ di tempo medio, per il qual tempo si ha dalle tavole la longitudine del Sole 11′ 1° 11′ 36″, 8, e per ciò la longitudine geocentrica d' Urano 5′ 1° 11′ 36″, 8, quale corretta dalle due equazioni (1) — 2″, 0 . . . . (2) + 1″, 1, dà la longitudine eliocentrica dell' istesso pianeta 5′ 1° 11′ 35″, 9.

Per il tempo dell'opposizione si deduce la latitudine geocentrica osservata 47′ 58″, 3 alla quale corrisponde la latitudine eliocentrica boreale 45′ 23″, 0.

Dalle tavole del Ch. Lambre si hanno la longitudine eliocentrica 5′ 1° 11′ 29′, 0, e la latitudine boreale 45′ 18″, 8, perciò la differenza di quelle tavole dall' osservazione era nella longitudine eliocentrica — 6″, 9, e nella latitudine — 4″, 2.

OP-

(1) Observationes Syderum habitæ Pisis ab an. 1774. ad an. 1778. p. 122.

(2) Novi Planetæ observationes & theoria pag. 16. et 17.

OPPOSIZIONE D'URANO OSSERVATA NEL 1796.

Da Giuseppe Slop de Cademberg.

Memoria ricevuta il dì 26 Ottobre 1804.

Urano fu veduto al quadrante murale il 26. Febbrajo colla stella *c*, ed il dì 27. colle stelle ρ e χ del Leone, i luoghi apparenti delle quali sono quì descritti per il dì 26. Nei nostri calcoli abbiamo fatto uso di quelli dedotti dal Catalogo di Bradley per le stelle ρ e χ, di quelle di Mayer per la stella *c*.

Dal catalogo delle stelle zodiacali di Mayer.

2ρ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5′ 5° 31′ 5″,7
Declinazione Boreale - - - - - -	0 10 21 2,3
c del Leone, Ascensione retta - - - - - - -	5 12 32 46,9
Declinazione Boreale - - - - - -	0 7 11 29,0
χ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5 13 37 45,7
Declinazione Boreale - - - - - -	0 8 26 4,2

Dal Catalogo di Bradley.

ρ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5 5 31 7,7
Declinazione Boreale - - - - - -	0 10 21 2,1
c del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5 12 32 47,2
Declinazione Boreale - - - - - -	0 7 11 33,7
χ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5 13 37 44,1
Declinazione Boreale - - - - - -	0 8 26 6,2

Dal Catalogo delle stelle zodiacali di La Caille.

ρ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5 5 30 58,7
Declinazione Boreale - - - - - -	0 10 21 11,0
c del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5 12 32 40,6
Declinazione Boreale - - - - - -	0 7 11 39,3
χ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5 13 37 40,1
Declinazione Boreale - - - - - -	0 8 26 11,8

Il dì 26. Febbrajo t. m. ore 12 6′ 5″

Differenza osservata fra Urano, e la stella *c* del Leone.

Nell'Ascension retta - - - - - - - - -	— 0 4 34 40,7
Nella Declinazione - - - - - - - - -	+ 0 2 55 43,1

 L'istes-

L'istessa corretta dalla refrazione - - - + 0' 2° 55' 46",9

Luoghi apparenti d'Urano.

Ascension retta - - - - - - - - - - - 5 7 58 6,2
Declinazione Boreale - - - - - - - - - 0 10 7 15,9
Longitudine - - - - - - - - - - - - - 5 5 52 23,6
Latitudine Boreale - - - - - - - - - - 0 0 48 40,3
Aberrazione nella Longitudine - - - - - — 0 0 0 15,4
Nutazione nella Longitudine - - - - - - + 0 0 0 16,0
Longitudine vera d'Urano - - - - - - - 5 5 52 24,2
Long. geoc. ricavata dalle tavole del Ch. Lambre 5 5 52 42,8
Latitudine Boreale - - - - - - - - - - 0 0 48 32,2
Differ. di quelle tavole dall' osserv. nella Long. + 0 0 0 18,6
Differenza nella Latitudine - - - - - - — 0 0 0 8,1

Il dì 27 Febbrajo t. m. ore 12 1' 57".

Differenza osservata fra Urano e ρ del Leone.

Nell'Ascensione retta - - - - - - - - + 0 2 24 32,7
In Declinazione - - - - - - - - - - — 0 0 12 45,6
L'istessa corretta dalla refrazione - - - — 0 0 12 45,9

Luoghi apparenti d'Urano.

Ascensione retta - - - - - - - - - - 5 7 55 40,4
Declinazione Boreale - - - - - - - - - 0 10 8 16,2
Longitudine - - - - - - - - - - - - 5 5 49 48,0
Latitudine Boreale - - - - - - - - - - 0 0 48 41,6
Aberrazione nella Longitudine - - - - — 0 0 0 15,4
Nutazione - - - - - - - - - - - - + 0 0 0 16,0
Longitudine vera d'Urano - - - - - - - 5 5 49 48,6
Long. geocentrica dedotta dalle tavole di Lambre 5 5 50 5,7
Latitudine Boreale - - - - - - - - - - 0 0 48 34,3
Differ. fra le tavole e l'osservazione nella Long. + 0 0 0 17,1
Differenza nella latitudine - - - - - - - — 0 0 0 7,3

Il dì 27. Febbrajo t. m. ore 12 1' 57".

Differenza osservata fra Urano, e χ del Leone.

Nell' Ascension retta - - - - - - - - - — 0 5 41 57,1
Nella Declinazione - - - - - - - - - - + 0 1 42 6,0
L'istessa corretta dalla refrazione - - - - + 0 1 42 8,6

Luo-

Luoghi apparenti d' Urano .

Ascensione retta		5'	7° 55' 47", 0
Declinazione Boreale		0	10 8 14, 8
Longitudine		5	5 49 54, 6
Latitudine Boreale		0	0 48 44, 2
Longitudine corretta dall' Aberrazione e dalla Nutazione, ossia Longitudine vera d' Urano		5	5 49 55, 2
Differenza fra le tavole di Lambre nella Longitudine	+	0	0 0 10, 5
Differenza nella Latitudine	—	0	0 0 9, 9

Si ha dunque la differenza media fra le tavole e l'osservazione riguardo alla longitudine + 15", 4, ed alla latitudine —8", 4, quali differenze si avranno per l' osservazione del 26 Febbrajo, assumendo per quel giorno la longitudine apparente osservata 5' 5° 52' 26", 8, e la latitudine 48' 40", 6 . Le Tavole danno per quel tempo la longitudine del sole 15' 8° 9' 14", 6, onde col moto relativo del Sole da Urano era stato descritto allora un arco di gradi 2 16' 47", 8 dopo dell' opposizione .

Quest' arco secondo il moto del sole di gradi 2 11' 28", 5, e di Urano 5' 54", 6 dedotti dalle tavole del Ch. Lambre fra il 24 Febbrajo ore 7 42' 8", e il 26 ore 12 6' 5" vien descritto in 2 giorni ore 4 15' 19", e perciò l'opposizione apparente era seguita il 24 Febbrajo ore 7 50' 46" di tempo medio, per il qual tempo si ha dalle tavole la longitudine del sole 11' 5° 58' 7", 9, onde la longitudine geocentrica d' Urano era 5' 5° 58', 7", 9 quale corretta dalle due equazioni + 0", 6 . . . . . + 1", 1 ci darà la longitudine eliocentrica 5' 5° 58' 9", 6.

La latitudine geocentrica osservata che per il 26. Febbrajo si assunse di 48' 40", 6 per il tempo dell' opposizione doveva essere 48' 42", 4, alla quale corrisponde la latitudine eliocentrica 46' 44", 2.

Le tavole danno la longitudine eliocentrica 5' 5° 58' 23", 6, e la latitudine 45', 56", 5, onde la loro differenza dall' osservazione era nella longitudine eliocentrica + 14', 0, e nella latitudine — 7", 7.

OP-

OPPOSIZIONE

D' URANO OSSERVATA NEL 1797.

Da Giuseppe Slop

Memoria ricevuta il dì 26 Ottobre 1804.

Urano fu osservato al Quadrante Murale ne' giorni 26 e 28 Febbrajo, 2 e 3 Marzo insieme colle stelle del Leone ρ, χ e σ, i luoghi apparenti delle quali sono quì descritti per il dì 26 Febbrajo. Nei nostri calcoli ci siamo serviti dei luoghi dedotti dal Catalogo di Mayer riguardo alla stella ρ, e di quelli di Bradley riguardo alle stelle χ e σ, tenendo conto dei loro moti apparenti per ciascun giorno.

Dal Catalogo delle stelle zodiacali di Tobia Mayer.

2 ρ del Leone, Ascensione retta - - - - -	5′	5°	31′	53″, 0
Declinazione Boreale - - - - -	0	10	20	45, 7
χ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5	13	38	32, 2
Declinazione Boreale - - - - -	0	8	25	46, 2
σ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5	17	40	20, 9
Declinazione Boreale - - - - -	0	7	8	22, 3

Dal Catalogo di Bradley.

ρ del Leone, Ascensione retta - - - - -	5	5	31	55, 1
Declinazione Boreale - - - - -	0	10	20	45, 4
χ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5	13	38	30, 6
Declinazione Boreale - - - - -	0	8	25	48, 2
σ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5	17	40	10, 1
Declinazione Boreale - - - - -	0	7	8	20, 9

Dal Catalogo delle stelle zodiacali di La Caille.

ρ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5	5	31	46, 0
Declinazione Boreale - - - - -	0	10	20	54, 8
χ del Leone, Ascensione retta - - - - - -	5	13	38	26, 6

De-

Declinazione Boreale - - - - - 0′ 8° 25′ 54″, 4
σ del Leone, Ascensione retta - - - - - 5 17 40 13, 3
Declinazione Boreale - - - - - 0 7 9 27, 2

Il dì 26. Febbrajo tempo medio ore 12 21′ 35″.

Differenza osservata fra Urano e 2ρ del Leone.

Nell' Ascension retta - - - - - - - - +0 7 4 54, 2
Nella Declinazione - - - - - - - - - —0 2 4 16, 6
L'istessa corretta dalla refrazione - - —0 2 4 19, 8

Luoghi apparenti d' Urano.

Ascension retta - - - - - - - - - - - 5 12 36 47, 2
Declinazione Boreale - - - - - - - - - 0 8 16 25, 9
Longitudine - - - - - - - - - - - - 5 10 48 59, 9
Latitudine Boreale - - - - - - - - - - 0 0 49 0, 1

Il dì 26 Febbrajo tempo medio ore 12 21′ 35″.

Differenza osservata fra Urano e χ del Leone.

In Ascensione retta - - - - - - - - - —0 1 1 39, 5
In Declinazione - - - - - - - - - - —0 0 9 27, 1
L'istessa corretta dalla refrazione - - - —0 0 9 27, 4

Luoghi apparenti d'Urano

Ascensione retta - - - - - - - - - - - 5 12 36 51, 1
Declinazione Boreale - - - - - - - - - 0 8 16 20, 9
Longitudine - - - - - - - - - - - - 5 10 49 5, 3
Latitudine Boreale - - - - - - - - - - 0 0 48 56, 9

Il dì 26. Febbrajo tempo medio ore 12 21′ 35″.

Differenza osservata fra Urano e σ del Leone.

In Ascensione retta - - - - - - - - - —0 5 3 30, 9
In Declinazione - - - - - - - - - - +0 1 8 1, 1
L'istessa corretta dalla refrazione - - - +0 1 8 2, 9

Luoghi apparenti d' Urano

Ascension retta - - - - - - - - - - - 5 12 36 39, 2
Declinazione Boreale - - - - - - - - - 0 8 16 23, 8
Longitudine - - - - - - - - - - - - 5 10 48 53, 6
Latitudine Boreale - - - - - - - - - - 0 0 48 55, 1

Preso un medio fra le tre osservazioni si avrà

La longitudine apparente d'Urano - - - 5 10 48 59, 6

La

La latitudine Boreale - - - - - - - - -		0'	0° 48'	57", 4
Aberrazione in Longitudine - - - - -	—	0	0	0 15, 4
Nutazione - - - - - - - - - - - - -	+	0	0	0 16, 8
Longitudine vera d'Urano - - - - - - -		5	10 49	1, 0
Longitudine geocentrica d'Urano calcolata per l'istesso tempo dalle Tavole del Ch. De Lambre - - - - - - - - - - - - - - - -		5	10 48	56, 3
Latitudine Boreale - - - - - - - - -		0	0 48	53, 3
Differenza di quelle tavole dall'osservazione per la longitudine - - - - - - - - - -	—	0	0	0 4, 7
Differenza per la latitudine - - - - - -	—	0	0	0 4, 1

Il dì 28. Febbrajo t. m. ore 12 13' 24".

Differenza osservata fra Urano e σ del Leone.

Nell'Ascensione retta - - - - - - - -	—	0	5	8 25, 6
Nella Declinazione - - - - - - - - -	+	0	1	10 3, 0
La stessa corretta dalla refrazione - - - -	+	0	1	10 4, 9

Luoghi apparenti d'Urano.

Ascensione retta - - - - - - - - - -		5	12 31	44, 7
Declinazione Boreale - - - - - - - -		0	8 18	25, 7
Longitudine - - - - - - - - - - -		5	10 43	37, 5
Latitudine Boreale - - - - - - - - -		0	0 48	56, 6
Aberrazione in longitudine - - - - -	—	0	0	0 15, 4
Nutazione - - - - - - - - - - - -	+	0	0	0 16, 8
Longitudine vera d'Urano . - - - - - -		5	10 43	38, 9
Longitudine geocentrica dedotta dalle tavole del De Lambre - - - - - - - - - -		5	10 43	41, 8
Latitudine Boreale - - - - - - - - -		0	0 48	53, 5
Differenza fra le stesse tavole e l'osservazione per la longitudine - - - - - - - - -	+	0	0	0 2, 9
Differenza per la latitudine - - - - -	—	0	0	0 3, 1

Il dì 2 Marzo t. m. ore 12 5' 13".

Differenza osservata fra Urano e 2ρ del Leone.

Per la longitudine - - - - - - - - -	+	0	6 55	3, 9
Per la latitudine - - - - - - - - - -	—	0	2 0	15, 7
L'istessa corretta dalla refrazione - - - -	—	0	2 0	18, 7

Luo-

Luoghi apparenti d'Urano.

Ascensione retta	5'	12°	26'	57", 2
Declinazione Boreale	0	8	20	26, 9
Longitudine	5	10	38	28, 2
Latitudine Boreale	0	0	49	1, 2

Il dì 2 Marzo t. m. ore 12 5' 13".

Differenza osservata fra Urano e σ del Leone.

Per l'Ascensione retta	— 0	5	13	17, 2
Per la Declinazione	+ 0	1	12	3, 1
La stessa corretta dalla refrazione	+ 0	1	12	5, 0

Luoghi apparenti d'Urano.

Ascensione retta	5	12	26	53, 4
Declinazione Boreale	0	8	20	25, 8
Longitudine	5	10	38	25, 2
Latitudine Boreale	0	0	48	58, 7

Preso il medio fra le due osservazioni si avrà

Longitudine apparente d'Urano	5	10	38	26, 7
Latitudine Boreale	0	0	48	59, 9
Aberrazione in longitudine	— 0	0	0	15, 4
Nutazione	+ 0	0	0	16, 8
Longitudine vera d'Urano	5	10	38	28, 1
Longitudine geocentrica calcolata dalle tavole di De Lambre	5	10	38	27, 1
Latitudine Boreale	0	0	48	53, 5
Differenza delle tavole nella longitudine	— 0	0	0	1, 0
Differenza nella latitudine	— 0	0	0	6, 4

Il dì 3 Marzo t. m. ore 12 1' 8".

Differenza osservata fra Urano e 2ρ del Leone.

Nell' Ascensione retta	+ 0	6	52	38, 0
Nella Declinazione	— 0	1	59	15, 3
La stessa corretta dalla refrazione	— 0	1	59	18, 3

Luoghi apparenti d'Urano.

Ascensione retta	5	12	24	31, 3
Declinazione Boreale	0	8	21	27, 3
Longitudine	5	10	35	51, 7
Longitudine Boreale	0	0	49	2, 3

Il dì 3 Marzo tempo medio ore 12 1' 8".

Differenza osservata fra Urano e χ del Leone.

Nell' Ascension retta - - - - - - - - -	—	0'	1° 13'	56", 1
Nella Declinazione - - - - - - - - -	—	0	0 4	24, 9
L'istessa corretta dalla refrazione - , -	—	0	0 4	25, 0

Luoghi apparenti d' Urano.

Ascensione retta - - - - - - - - - -	5	12	24	35, 0
Declinazione Boreale - - - - - - - - -	0	8	21	23, 1
Longitudine - - - - - - - - - -	5	10	35	56, 7
Latitudine Boreale - - - - - - - - -	0	0	48	59, 8

Il dì 3 Marzo tempo medio ore 12 1' 8".

Differenza osservata fra Urano e σ del Leone.

Per l'Ascension retta - - - - - - - - -	—	0	5 15	45, 5
Per la Declinazione - - - - - - - - -	+	0	1 13	3, 6
L' istessa corretta dalla refrazione - - -	+	0	1 13	5, 6

Luoghi apparenti d' Urano.

Ascensione retta - - - - - - - - - -	5	12	24	25, 2
Declinazione Boreale - - - - - - - - -	0	8	21	26, 4
Longitudine - - - - - - - - - -	5	10	35	46, 5
Latitudine Boreale - - - - - - - - -	0	0	48	59, 2

Preso il medio fra le tre osservazioni si avrà

Longitudine apparente d' Urano - - - -	5	10	35	51, 6
Latitudine Boreale - - - - - - - - -	0	0	49	0, 4
Aberrazione nella Longitudine - - - - -	—	0	0	0 15, 3
Nutazione - - - - - - - - - - -	+	0	0	0 16, 8
Longitudine vera d' Urano - - - - - -	5	10	35	53, 1
Longitudine geocentrica ricavata dalle Tavole di De Lambre - - - - - - - - -	5	10	35	51, 0
Latitudine Boreale - - - - - - - - -	0	0	48	53, 5
Differenza fra le tavole e l' osservazione nella longitudine - - - - - - - - -	—	0	0	0 2, 1
Differenza nella latitudine - - - - - -	—	0	0	0 6, 9

Le stelle 2ρ e χ del Leone, non essendosi potute vedere in tutte le notti, come si è fatto della stella σ, e le posizioni del pianeta che dalle stesse si ricavano, trovandosi differenti, per avere

re il giusto medio delle differenze di ciaschedun giorno fra le tavole e l'osservazione, bisognerà trovare questo medio per ognuna delle due stelle, e servendosene pei giorni in cui le stesse non si osservarono, trovare la differenza media che si avrebbe avuta in quei giorni, se fossero state osservate.

Le differenze che nei giorni 26 Febbrajo, 2 e 3 Marzo si deducono dalla stella 2ρ nelle longitudini vere fra l'osservazione e le tavole erano $-5'',0 \ldots -2'',5 \ldots -2'',2$, delle quali la media è $-3'',2$, e quelle che si ricavano dalla stella χ nei giorni 26 Febbrajo e 3 Marzo si hanno $-10'',4 \ldots -7'',2$, di cui la media è $-8'',8$.

Così nelle latitudini le stesse differenze si avranno dalla stella 2ρ, $-6',8 \ldots -7'',7 \ldots -8'',8$, delle quali la media è $-7'',8$, e dalla stella χ, $-1'',6 \ldots -6'',3$ e la media $-4'',0$. Aggiungendo per il dì 28 Febbrajo alle longitudini e latitudini calcolate dalle tavole queste rispettive differenze medie, si avrà la longitudine vera che in quel giorno si sarebbe avuta dalla stella 2ρ, $5^{t}\ 10^{\circ}43'\ 45'',0$, e dalla stella χ, $5^{t}\ 10^{\circ}\ 43'\ 50'',6$, e la latitudine $49'\ 1'',3 \ldots 48'\ 57'',5$, onde la differenza media fra le tavole e l'osservazione sarebbe stata lo stesso giorno per la longitudine vera $-3'',0$, e per la latitudine $-5'',0$. Così il 2 Marzo aggiungendo alla longitudine presa dalle tavole $8'',8$ ed alla latitudine $4'',0$, la longitudine vera d'Urano che si avrebbe avuta lo stesso giorno dalla stella χ, sarà $5^{t}\ 10^{\circ}\ 38'\ 35'',9$, e la latitudine $48'\ 57''\ 5$, onde la differenza media di quel giorno fra le tavole e l'osservazione sarà per la longitudine vera $-3'',6$, e per la latitudine $-5'',6$.

Prendendo ora per il 28 Febbrajo e 2 Marzo queste differenze così corrette, si avrà per tutti quattro i giorni delle osservazioni la differenza media fra le tavole e l'osservazione nella longitudine vera $-3'',4$, e nella latitudine $-5',4$ quali differenze perchè si trovino nell'osservazione del 28 Febbrajo, la più vicina all'opposizione, bisognerà supporre la longitudine apparente osservata in quel giorno $5^{t}\ 10^{\circ}\ 43'\ 43'',8$, e la latitudine $48'\ 58'',9$.

La longitudine del sole dedotta dalle tavole si ha lo stesso

giorno 11' 10° 55' 44", 3, onde allora era stato descritto col moto relativo d' Urano dal Sole un arco di 12' 0", 5 dopo dell'opposizione. Quest'arco per il moto del Sole di 15' 2", 2 e del Pianeta 39", 4 calcolati dalle tavole per il 28 Febbrajo fra le ore 6. 13' 24", e le ore 12 13' 24" fu percorso in ore 4 35' 28", il qual tempo sottratto dal momento dell' osservazione dà il momento dell'opposizione apparente il 28 Febbrajo tempo medio ore 7 37' 56". La longitudine del Sole si ha per quel tempo dalle tavole 11' 10° 44' 13", 9 dalla quale si deduce la longitudine geocentrica d' Urano 5' 10° 44' 13", 9, che corretta dalle due equazioni +1", 3..... + 1", 1 dà la longitudine eliocentrica 5' 10° 44' 16", 3 .

La latitudine geocentrica per il momento dell' opposizione si ha dall' osservazione 48' 58", 9 alla quale corrisponde la latitudine eliocentrica 46' 19", 6 . Le tavole del Ch. Delambre danno per lo stesso momento la longitudine eliocentrica d'Urano 5' 10° 44' 12", 1 e la latitudine 46' 14", 5, onde la loro differenza dall' osservazione era nella longitudine eliocentrica — 4", 2, e nella latitudine — 5", 1 .

OS-

OSSERVAZIONI ED ELEMENTI
DEL NOVISSIMO PIANETA GIUNONE
SCOPERTO DA HARDING A LILIENTHAL

Trasmessi alla Società

Da Giuseppe Slop

E ricevuti il dì 25 del 1805.

Osservazioni di Harding.

1804	T°. medio a Lilienthal	A. retta apparente	D. Australe apparente
Settem. 5	11h 12′ 45″	1° 51′ 51″	0° 11′ 26″
6	11 26 48	1 44 21	0 24 8

Osservazioni di Olbers.

1804	T°. medio a Bremen	A. retta apparente	D. Australe apparente
Settem. 7	10 37 21	1 36 56	0 36 9
8	8 11 20	1 29 37	0 47 19
9	10 48 50	1 20 38	1 0 50
10	8 15 6	1 13 4	1 11 56
11	10 34 3	1 3 39	1 25 41
12	11 18 32	0 54 5	1 39 4
13	8 54 0	0 46 3	1 50 50
14	8 24 44	0 37 7	. . .
15	10 54 28	0 26 40	2 18 5
17	10 23 9	0 7 25 : : :	2 44 32
18	8 38 17	359 58 47	2 56 51
21	8 30 54	359 28 52	3 36 54
21	10 9 32	359 28 9	3 37 46
23	13 25 57	359 6 18	4 6 37
24	8 27 37	358 58 14	4 17 2
25	8 41 38	358 48 13	4 30 54
27	9 35 1	358 27 33	4 57 32
28	8 13 44	358 18 13	5 10 4
30	8 3 19	357 58 31	5 36 2
Ottob. 3	7 43 0	357 29 48	6 13 57
6	9 59 47	357 1 58	6 51 31
7	11 41 29	356 52 52	7 4 21
9	8 1 38	356 37 41	7 25 10

Osser-

Osservazioni d' Oriani.

1804	T°. medio a Milano	Asc. retta apparente	Decl. Aust. appar.
Settem. 27	11 h 27′ 45″	358° 26′ 54″	4° 58′ 37″
28	11 23 9	358 16 52	5 11 45
29	11 18 33	358 6 54	5 24 25
30	11 13 58	357 57 5	5 37 42
Ottob. 4	10 55 44	357 19 18	6 27 44
5	10 51 13	357 10 26	6 39 55
6	10 46 42	357 1 39	6 51 36
7	10 42 12	356 53 12	7 3 23

Osservazioni di Maskelyne.

1804	T°. medio a Greenwich	Asc. retta apparente	Decl. Aust. appar.
Settem. 25	11 36 50	358 46 48	4 32 28
29	11 18 27	358 6 52	5 24 57

Osservazioni di Zach.

1804	T°. medio a Seeberg	Asc. retta appar	Decl. Aust. appar.
Ottob. 10	10 28 30	356 29 14	7 36 51
12	10 20 0	356 14 43	7 58 26
20	9 45 34	355 26 52	9 13 1
21	9 47 22	355 26 0	9 20 53

Elementi di Gauss.

Epoca 1804 Settembre 30 a 0^h tem. med. in Seeberg 21° 17′ 47″
Moto medio diurno - - - - - - 836″, 89
Afelio - - - - - - - - - - - - 231° 38′ 1″
Eccentricità - - - - - - - - - 0, 254964
Logaritmo del semiasse - - - - - 0, 4182255
Nodo - - - - - - - - - - - - 170° 46′ 41″
Inclinazione - - - - - - - - - 12° 19′ 43″

1804	Asc. retta calcolata secondo questi elementi	Decl. Austr. calcolata	Differenza dall'osserv.		Osservatori
Sett. 13	0° 44′ 56″, 0	1° 52′ 37″.6	−0′,4	+ 0″ 6	Zach
14	0 35 42 , 9	2 5 40, 3	+1 ,9	+ 4 ,8	—
15	0 26 19 , 3	2 18 48 , 6	−0 ,2	+10 ,1	—
17	0 7 8 , 0	2 45 18 , 8	−0 ,1	— 5 ,7	—
18	359 57 20 , 9	2 58 38 , 7	+0 ,4	+ 7 ,8	—
20	359 37 39 , 0	3 25 24 , 7	. . .	+21 ,2	—
23	359 7 17 , 4	4 5 36 , 5	+2 ,5	+ 2 ,0	—
23	359 7 3 , 3	4 5 55 , 0	+3 ,3	+ 8 ,0	Burckhardt
25	358 46 45 , 8	4 32 41 , 4	−2 ,2	+13 ,2	Maskelyne
27	358 26 56 , 9	4 58 43 , 7	−3 ,7	−12 ,8	Zach
28	358 16 58 , 7	5 11 49 , 3	−7 ,9	+ 5 ,5	—
29	358 6 48 , 0	5 25 11 , 7	−4 ,3	+15 ,0	Maskelyne
30	357 57 18 , 2	5 37 50 , 4	−8 ,5	+ 6 ,7	Zach
Ott. 2	357 38 6 , 4	6 2 50 , 7	−9 ,6	+ 0 ,2	—
4	357 19 34 , 8	6 27 40 , 2	−4 ,7	+ 1 ,5	—
5	357 10 37 , 3	6 39 43 , 7	−4 ,2	+ 3 ,8	—
6	357 1 52 , 8	6 51 35 , 6	−3 ,5	+ 3 ,3	—

RICERCHE

Di Giuseppe Piazzi

Su la parallasse annua di alcune delle principali fisse

Ricevute il dì 29 *del* 1805.

Il moto della terra intorno al Sole obbligò Copernico a supporre le fisse ad una prodigiosa immensa distanza da noi. In quei primi tempi del rinascimento dell'Astronomia egli non era possibile pronunziare, se, e quai limiti si dovessero assegnare a questa ipotesi. Come però si migliorarono gli stromenti, due uomini sommi, Hook e Flamsteed, si proposero di discutere questo punto, e stabilire, se realmente il rapporto tra l'asse dell' orbita terrestre, e l' intervallo che lo disgiunge dalle stelle, sia superiore ad ogni misura, oppure sì picciolo, che non si possa riconoscere, che col mezzo di delicatissime osservazioni. Si fecero essi dunque ad esaminare alcune delle principali fisse, nelle quali più agevolmente e più sicuramente si potessero distinguere le ineguaglianze, alle quali per avventura andasser soggette nel giro dell' anno, e dalle quali si potesse giudicare della loro distanza. Scelse Hook γ del Dragone, stella che passando pel zenit del luogo in cui egli osservava, non poteva presentare alcuna difficoltà per parte della rifrazione: Flamstedio seguì la Polare, in cui la variazione annua doveva offrirsi in tutta la sua assoluta grandezza. L' uno e l'altro conchiusero per l'esistenza di una parallasse; ma le osservazioni del primo non furono compite, nè abbastanza sicure; e quelle del secondo indicavano bensì una variazione annua, ma contraria alle leggi della parallasse. Questi primi tentativi furono ben tosto seguiti da altri, nei quali nome immortale acquistossi il Bradley. Provveduto egli di un eccellente settore verticale, e forni-

nito di somma sagacità nell' arte di osservare non meno che in quella di combinare, se non decise la questione, giunse però colla grande scoperta, primo dell'aberrazione, indi della nutazione a togliere le principali difficoltà, che ne avrebbero per sempre impedito lo scioglimento. E veramente allora soltanto si fu in grado di riconoscere la parallasse delle fisse, sempre che sia di tale grandezza, che si possa rendere a noi sensibile. Della qual cosa lo stesso Bradley ne diede una prova in γ del Dragone, le di cui osservazioni spogliate essendo dagli effetti dell' aberrazione e nutazione, abbastanza indicavano, che la parallasse di questa stella, se pure ne aveva, non poteva essere maggiore di $0'',5$, quantità che non può misurarsi ancora. Sul di lui esempio altri si fecero ad esaminare altre stelle, e Sirio in particolare, come quella, che per la sua gran luce si crede a noi più vicina. Quanto però si tentò, ad altro non valse che a promovere dei dubbj, e niente si ottenne di positivo e soddisfacente. Prevalse quindi generalmente tra gli Astronomi l'opinione, che le stelle o non abbiano parallasse, o la medesima sia così picciola, che nello stato attuale dell'Astronomia strumentale ci manchino i mezzi per discoprirla. A me stesso, pieno ancora di questa opinione, non cadde nell'animo mai, sino a due anni addietro, di rivolgere le mie osservazioni a simile ricerca. Ma nel 1802 avendo insieme raccolte tutte le declinazioni della Lira, osservate nello spazio di dieci anni, ed in tempi diversi degli anni medesimi, vi notai delle differenze, le quali, comunque picciole, non lasciarono di farmi pensare che forse potessero essere cagionate dalla parallasse. E ciò tanto maggiormente, che non essendo questa stella, che mezzo grado distante dal zenit, nè le rifrazioni, nè la dilatazione del metallo possono viziare le osservazioni. Mi proposi pertanto di seguitamente esaminarla ne'tempi più opportuni, ed insieme con essa alcune altre delle principali, cioè la Capra, Aldebaram, Procione, Sirio, Arturo, ed Atair: Le osservazioni in vero non mi sono sempre riuscite felicemente: sono state talora impedite e talora interrotte dall' incostanza del cielo, nè sempre proseguite con eguale impegno, sul timore che le rifrazioni fossero per rende-

re inutile ogni mio sforzo. Mi lusingo, pur nondimeno, che possino esse sparger qualche lume su di un argomento omai interamente abbandonato dagli Astronomi. Ma se niente potrà conchiudersi, resterà almeno provato ciò che sino a questo punto, forse con troppa facilità, si è supposto. E perchè delle mie congetture si possa giudicare con fondamento, darò per ciascuna stella le osservazioni coi risultati che ne ho dedotti; dispensandomi però dal presentare il calcolo, che nel dubbio, ciascuno potrà verificare, purchè si valga delle mie rifrazioni, e delle tavole del Mezger per la nutazione ed aberrazione. Mi varrò ancora delle declinazioni da me osservate prima del 1802, e che trovansi nell' appendice al Catalogo, omettendo le osservazioni a fine di non rendere questa memoria di soverchio prolissa.

§. 1.

Calcolo del tempo della parallasse in declinazione.

Per noi la parallasse delle fisse è propriamente in latitudine, ma dessa non si osserva, e vi si sostituisce l' altra in declinazione per poi col calcolo risalire a quella. I tempi di queste due parallassi non sono i medesimi, ed ove per la prima si hanno immediatamente dalle longitudini delle stelle, per la seconda conviene ricorrere al calcolo, il quale per altro è semplice e breve. Giunta la terra in quel punto dell' orbita sua, in cui il raggio visuale dell' osservatore è perpendicolare al cerchio di declinazione della stella, dee essa apparire nel luogo istesso, in cui verrebbe osservata dal Sole. Ora quest' arco perpendicolare al cerchio di declinazione facendo col cerchio di latitudine un angolo uguale al complemento dell' angolo di posizione; nel triangolo rettangolo formato dalla latitudine, dalla declinazione, e dall' arco dell' Ecclitica compreso tra la perpendicolare ed il cerchio di latitudine, tosto si trova l'arco intercetto, la di cui tangente è sempre ugnale alla cotangente dell'angolo di posizione moltiplicata pel seno della latitudine. Se pertanto quest' arco si aggiun-

ga

ga o sottragga dalla longitudine della stella, a norma che la terra secondo l'ordine dei segni è più o meno avanzata della stella, si avrà il luogo della terra, in cui la parallasse è 0. Al medesimo aggiunti tre segni, si avrà l'altro in cui è massima o minima; sarà massima, se il raggio allontana l'astro dall'equatore, e minima se l'avvicina. Finalmente sottratti sei segni dai luoghi della terra si avranno quei del Sole, che daranno i tempi corrispondenti alle diverse parallassi.

§. 2.

Aldebaram.

Cadono le diverse parallassi di questa stella, la massima ai 30 Luglio, ai 27 Gennajo la minima, ed ai 28 Aprile e 28 Ottobre le due 0. Le mie osservazioni dal 1791 al 1801, i distinti risultati delle quali sono riportati nell'appendice al Catalogo (pag. 4), sono state fatte quasi precisamente nei tempi delle parallassi massima e minima. Se pertanto si trascuri il risultato del 1791, che non dipende che da due sole osservazioni, e similmente non si considerino gli altri due del 1796 e 1797 per le ragioni altrove spiegate, tutti quei di Gennajo e Dicembre prossimamente convengono nel dare la medesima differenza in declinazione con quei di Luglio 1793: lo che è confermato ancora da altre 7 osservazioni di Gennaro 1804.

1792.. dai 27 Genn. ai 6 Febb....	oss. 6.	16.4.38,2...	1800... 16.5.43,1
1800.. dai 20 Genn. ai 6 Febb....	5...	5.43,0	5.43,0
1 ... dai 9 ai 26 Dicembre	7...	5.49,4	5.41,3
4... dai 19 ai 31 Gennajo	7...	6.15,4	5.43,0
Medio, che corrisponde alla parallasse minima			16.5.42,6
Ma da 11 osservazioni dai 2 ai 17 Luglio 1793, si ha			5 45,9

quindi la declinazione di Luglio non essendo lontana dalla massima che di 20 giorni, sembra quì indicata una parallasse di 1″,5 circa. Come però in Luglio non è più stata osservata questa stella, debbonsi aspettare nuove osservazioni, le quali confermino o distruggano questo primo risultato. Soggiugnerò quì le osserva-

zioni di Gennajo 1804, e darò in seguito le altre, che mi propongo di fare in Gennajo e Luglio dell'anno prossimo venturo

Giorni di Gennajo 1804	Barometro	Termometro interiore	Termometro esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate dal zenit di Aldebaran	Venti	Stato del Cielo
19	30,040	60,0	56,0	I *	22° 0' 10",0	S.O	Cielo lucido, aere umido
21	30,038	60,2	53,7	D	21 59 48 ,0	N.E	Cielo bello, aere rigido
23	30,050	59,5	53,4	I	20 0 9 ,0	N.O	Cielo misto, aere umido
24	30,030	58,7	51,0	D	21 59 46 ,5	S.O	Cielo bello
25	29,874	58,2	52,7	I	22 0 12 ,0	S.O	Cielo nebbioso
30	30,070	62,2	54,7	D	21 59 46 ,0	S.O	Cielo bello
31	30,120	60,7	50,2	I	22 0 10 ,5	O	Cielo lucido

* La lettera I (inverso) indica le divisioni rivolte á Ponente; D (diretto) le indica rivolte a Levante.

§. 3.

Capra.

Avendo paragonate le mie osservazioni di questa stella degli anni 1792, 1794, 1803, riportate alle pag. 5 e 76 dell'appendice, mi parve ravvisarvi qualche indizio di una variazione annua. Determinati pertanto i tempi delle parallassi, minima (24 Maggio), massima (25 Novembre), o. (27 Agosto e 23 Febbraro), non ho trascurato di tentare le opportune osservazioni, dalle quali non sono punto confermati i miei primi dubbj, siccome dalle osservazioni medesime che soggiungo si renderà chiaro

Giorni

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate della Capra dal zenit	Venti	Stato del Cielo
1803							
Nov. 28	29,996	60,3	51,8	D	7°40′ 5″,5	O	Cielo nebbioso
29	29,834	61,2	58,0	I	40 17 ,5	S.O	Cielo nuvoloso
Dic. 18	29,870	62,3	53,8	D	40 9 ,0	O	Cielo bello
19	29,856	63,0	62,4	I	40 22 ,0	S O	Cielo nebbioso
1804							
Feb. 23	30,058	52,5	42,9	I	40 35 ,0:::	S.O	Cielo coperto
24	29,810	52,2	51,0	D	40 11 ,0	N.O	Cielo coperto
25	29,592	52,2	50,8	I	40 30 ,0	N.O forte	Cielo coperto
27	29 960	48,7	43,0	I	40 29 ,5	N.O	Cielo quasi oscuro
28	29,830	49,6	47,5	D	40 12 ,0	O	Cielo bello
Mar. 1	29,550	54,3	50,3	I	40 30 ,0	N	Cielo nuvoloso
4	29,730	53,0	52,8	D	40 13 ,5	N.	Cielo pieno di nuvole
Mag. 29	29,912	73,5	73,2	D	40 1 ,5	S.O	Cielo nebbioso
30	29,880	74,1	73,3	I	40 23 ,0	S O	Cielo bello, aere fosco
31	29,900	74,0	73 0	D	39 59 ,0	S O	Cielo bello
Giu. 1	29,912	74,2	73,5	I	40 23 ,5:	E	Cielo nebbioso, aere fosco
3	29,960	74,2	73,2	I	40 24 ,0	S.O	Cielo bello, aere netto
4	30,008	74,1	72,7	D	40 0 ,0	S.O	Cielo bello, aere netto
5	30,090	75,0	74,5	I	40 25 ,0	S.O	Cielo bello, aere netto
6	30,090	76,8	76,3	D	39 59 ,0	E	Cielo nebbioso, aere net.

Risultati.

1803 { dai 15 ai 13 Apr. vicino alla parall. min. oss. 4... 45°.46′.53″,64 . . 1804 . . 45°.46′.58″,3
dai 28 Nov. ai 19. Dic. parallasse massima . . . . . 4 . . . . 46. 53 , 05 . . . . . 46. 57 ,7

1804 { dai 24 Febb. ai 4 Marzo, parallasse 0 . . . oss. 6 . . . . . 46. 58 ,3
dai 26 Maggio ai 6 Giugno, parall. minima ... 7 . . . . . 46. 57 ,6

non sembra quindi che la Capra possa avere una parallasse maggiore di 1″, e questa medesima, se è possibile riconoscerla nello stato attuale dell' Astronomia, ciò non sarà concesso che all' Os-

ser-

servatorio di Milano, al zenit del quale passa questa stella, e che è provveduto di un eccellente settore verticale, e di un gran quadrante murale, opera dell' immortale Artefice Ramsden.

§. 4.

Sirio.

Giacomo Cassini osservò questa stella nei diversi periodi delle sue variazioni annue, e ne conchiuse una parallasse di 6". Dalle osservazioni di La Caille al Capo sarebbe di 4", ma da altre fatte in Parigi con maggior agio e in maggior numero non ne risulta alcuna. Altre osservazioni tentate in Inghilterra sono similmente riuscite infruttuose. E veramente se la parallasse di Sirio non è maggiore di 4", è ben difficile che dalle due, massima e minima, niente con sicurezza si possa stabilire in Europa. Sirio ha 16° di declinazione Australe, e le due parallassi cadono nei Solstizj. La minima, che corrisponde ai 27 Giugno si osserva verso mezzodì, la massima ai 26 Dicembre dopo mezza notte. La correzione delle rifrazioni medie sarà dunque generalmente sottrattiva per la prima, additiva per la seconda, e massima nell' uno e nell' altro caso. Quindi, se il modulo della correzione non è esatto, allontanerà o avvicinerà i due risultati del doppio del suo errore, e la parallasse non si potrà riconoscere. Ora il modulo del Maskelyne, di cui generalmente valgonsi gli Astronomi, da me si è sempre trovato un po più picciolo di quanto le osservazioni sembrano richiederlo: le distanze dal vertice quando passano li 50°, e sono osservate in tempi, nei quali i termometri sono sopra gli 80°, e la loro differenza è oltre li 5 in 6°, il più delle volte non si possono uguagliare senza supporre una correzione maggiore di quella che si ha dalla tavola o modulo. Le declinazioni di Giugno saranno dunque un poco maggiori del giusto, e un poco minori quelle di Dicembre; l' effetto della parallasse si confonderà coll'imperfetta correzione delle rifrazioni. Si aggiunga che Sirio di giorno, e principalmente verso mezzodì è assai tremolo, per lo che riesce

un

un poco difficile il porlo sotto il filo; e di notte tanta è la sua luce, che talora con difficoltà si può distinguere il filo. Ma usando somma diligenza, e moltiplicando le osservazioni si può riparare a questi inconvenienti, ma non così a ciò che risguarda le rifrazioni. Questa materia non è ancora ben stabilita, nè oserei dire quando sarà per esserlo, richiedendo gran numero di osservazioni, squisitezza di stromenti, e perspicacia d'ingegno. Per la qual cosa a me sembra, che il solo mezzo che ci resti, egli sia di paragonare tra di esse la parallasse massima e o, come quelle che si osservano essendo la temperatura più uniforme, e le correzioni delle rifrazioni più piccole. Si ha il vantaggio ancora che nelle parallassi o, le quali cadono in Marzo ed in Settembre, le osservazioni facendosi verso le sei della mattina, e verso le sei della sera, l'aere è più puro, e la stella meno tremola. E se ciò si può generalmente stabilire per tutti gli osservatorj di Europa, rispetto a questo di Palermo non può esservi dubbio. Poichè, 1° nella state spirano per lo più i mezzidì e sirocchi, i quali, come altrove ho fatto osservare, diminuiscono le rifrazioni, indipendentemente dallo stato del Barometro e termometro. 2° Nella state il termometro di Farenheit verso mezzodì sale a 80° e 85°, e nell' inverno non discende oltre li 54, e spesso rimane tra li 56° e 60°. 3° In Marzo il grado del termometro poco differisce da quello di Dicembre. Sono dunque le osservazioni, che corrispondono alle parallassi o e massima, le meno soggette ad errore. Queste pertanto avendo io replicatamente osservate, ritrovo una parallasse di 4″ circa; quanto appunto fu trovato da La Caille al Capo, per mezzo delle parallassi massima e minima, sulle quali la differenza delle rifrazioni non poteva cagionare un errore sensibile, essendo la distanza di Sirio dal vertice di soli 18°. Quantunque però io giudichi non doversi tener conto della parallasse minima, non ho trascurato di osservarla, ed essa ha confermati i miei dubbj, siccome si scorgerà dalle osservazioni e risultati che seguono.

Giorni

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizioni del Cerchio	Distanze osservate di Sirio dal zenit	Venti	Stato del Cielo
1803							
Sett. 18	29,850	70,8	69,7	D	54° 32′ 14″,0	S.O	Cielo nebbioso
19	29,866	75,8	74,0	I	32 41 ,5	N.O	Pieno di nuvole
20	29,880	75,0	71,0	D	32 15 ,0	S.O	Nebbioso
23	29,896	72,2	63,0	I	32 38 ,5	N.O	Nuvoloso
27	29,752	63,0	60,8	D	32 12 ,0	N.O	Quasi coperto
28	29,856	68,0	60,2	I	32 39 ,0	S.O	Bello
1804							
Mar. 5	29,540	54,2	48,7	I	33 5 ,0	N	Cielo lucido, aere umido
6	29,676	56,0	53,5	D	32 44 ,0	N.O	Cielo nuvoloso
15	29,840	56,0	47,5	I	33 2 ,0	N.E	Cielo bello
16	29,852	55,4	49,5	D	32 42 ,0	O	Lucido
18	29,680	56,8	55,6	I	33 5 ,5	N.E	Bello
19	29,652	57,5	58,3	D	32 44 ,5	S.O forte	Cielo misto di nuv. e neb.
20	29,728	62,2	61,0	I	33 5 ,5	S.O forte	Cielo pieno di nuvo. e neb.
21	29,630	64,2	60,6	D	32 43 ,0	E	Cielo bello, aere umido
22	29,630	64,5	62,0	I	33 6 ,0	S.O	Cielo nebbioso
24	29,646	67,4	61,0	D	32 43 ,0	N.O forte	Cielo nuvoloso
Giu. 27	29,998	79,0	78,0	D	32 33 ,0	E	Cielo bello, aere fosco
28	29,830	81,3	81,3	I	33 3 ,0	SS E	Cielo neb. , aere caldo secco e denso
29	29,740	81,0	84,0	D	32 35 ,0	SS E forte	Cielo bello, aere secco e denso
Lug. 30	29,940	80,1	77,2	D	32 33 ,0	S.O	Cielo bello, aere fosco
1	30,080	80,3	78,6	I	32 58 ,5	S O	Cielo bello, aere netto
2	29,900	83,0	82,5	D	32 33 ,0	S.O	Cielo bello, aere fosco
3	29,790	85,2	85,2	I	33 0 ,5	SS O	Cielo nebbioso, aere fosco
4	29,870	84,6	82,8	D	32 32 ,5	S.E	Cielo bello, aere fosco e caldo
5	29,884	83,0	80,0	I	33 2 ,5	S.O	Cielo lucido, aere netto
6	29,830	83,0	84,4	D	32 33 ,0	S.O	Cielo lucido, aere netto
7	29,790	84,8	85.4	I	33 2 ,0	S.O	Cielo lucido, aere netto
Dic. 10	29,886	59,5	53,7	I	32 53 ,0	E	Cielo coperto di neb., ae. gros. ed um.
11	29,790	60,5	55,0	D	32 40 ,0	E	Cielo coperto, ae. grosso e umido
12	29,764	60,2	52,8	D	32 39 ,0	S.O	Cielo lucido, aere netto
14	29,730	59,7	57,0	I	32 55 ,0	N.O fortiss.	C. misto-vario, aere netto, ma agitato
17	29,630	55,0	53,0	D	32 40 ,0	O	Cielo bello, aere netto e quieto
19	29,654	59 6	57,6	I	32 58 ,0	S.O	C. cop. di neb., aere den. , poco un.

Risultati.

Delle declinazioni riportate nell'appendice al catalogo ne darò le sole degli anni 1799 e 1802, per essere le altre del 1791 e 1792 troppo lontane. E poichè le osserva zioni del 1799 sono state fatte 35 giorni dopo la parallasse massima, e 24 quelle del 1802, ridurrò le prime e seconde ai 26 Dicembre, supponendo la parallasse di 4″.

1799	Dai 27 Genn. al 1° Febbrajo	oss. 3	16°26′ 58″,0	1804.	16°27′ 22″,9
1802	Dai 13 ai 27 Gennajo	4	27 13 ,7		27 23 ,2
1803	Dai 18 ai 28 Settembre . . .	6	27 14 ,5		27 19 ,0
	Dai 18 ai 24 Marzo	6	27 18 ,7		27 18 ,7
	Dai 27 Giugno alli 8 Luglio .	8	27 19 ,7		27 19 ,7
	Dai 10 ai 19 Dicembre . . .	6	27 23 ,7		27 23 ,7
	Medio delle tre parallassi massime			16° 27′ 23″,2	
	Medio delle due o			27 18 ,8	
	Parallasse minima			27 19 ,7	

Dalle osservazioni di Giugno e Dicembre non si ha che 3″,5 di differenza, onde queste eccedono quelle. La Caille a Parigi trovò il contrario, le prime cioè maggiori di 2″,5 delle seconde: la qual cosa dimostra assai chiaramente la picciolezza del modulo per la correzione delle rifrazioni. A Parigi ove le distanze dal Zenit sono dieci gradi maggiori che a Palermo, vi produsse un errore assai maggiore. La Caille notò in margine alle sue osservazioni, che per uguagliarle doveansi aumentare le rifrazioni di $\frac{1}{27}$; perchè le mie di estate fossero maggiori di quanto richiede la supposta parallasse, si dovrebbe aumentare il modulo di 0″,05; aumento per verità troppo forte, nè mai indicato dalle osservazioni. Ma se a questa considerazione si aggiunga l'altra della natura dei venti, i quali spirarono in quasi tutt'i giorni delle osservazioni, e che per lo più furono australi, e talora assai gagliardi, forse non si troverà tanto difficile, che queste due cause in-

sieme abbiano cagionato un errore di 4″. In ogni maniera da tutto ciò sembrami che si possa ben conchiudere, che se la parallasse di 4″ non è pienamente sicura, non lascia però di essere molto probabile.

§. 5.

Procione.

Dal 1802 al 1804 ho tentato di osservare questa stella in tutti i diversi periodi della sua parallasse, ma non sempre sono stato secondato dal Cielo. Verso la parallasse minima, che cade ai 15 Dicembre, mi è riuscito di fare parecchie osservazioni, e parecchie nei tempi della parallasse *zero*, che corrisponde ai 14 Marzo e 16 Settembre; ma non più di due in Giugno, mese in cui succede la massima, e queste disgiunte per sette giorni poco sicure, e da non tenersene conto. Nientedimeno le due *zero* e minima sembrano assai chiaramente indicarne una abbastanza sensibile, siccome si potrà scorgere dalle osservazioni, che seguono

Gior-

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate di Procione al Zenit	Venti	Stato del Cielo
1803							
Sett. 1	29,	76,3	76,0	I	32° 23′ 1″,0	O	Cielo pieno di nuvole
4	29,781	75,2	74,5	D	22 40 ,0	S.O	bello
5	30,015	76,2	76,0	I	22 59 ,0	O	nuvoloso
6	30,063	74,7	71,6	D	22 42 ,0	N.E	con grosse nuvole
7	29,978	73,5	70,5	I	23 2 ,5	S.O	bello
8	29,996	74,0	72,0	D	22 39 ,5	S.O	bello
10	30,084	73,8	72,0	D	22 42 ,8	S.O	bello
11	29,988	74,1	71,0	I	23 1 ,0	S.O	bello
12	29,762	76,0	74,8	D	22 41 ,0	S.E	bello
13	29,852	76,8	73,8	I	23 1 ,5	S.O	bello
19	29,874	75,9	74,0	I	23 3 ,0	N.O	pieno di nuvole
20	29,880	72,2	72,4	D	22 41 ,0	S.O	coperto di nebbia
1804							
Marz. 5	29,540	54,2	46,5	I	32° 23′ 15″,0	N	Cielo lucido
6	29,680	56,0	53,0	D	22 58 ,0	N.O	nuvoloso
15	29,840	56,0	46,0	I	23 12 ,0	N.E	bello
16	29,850	55,9	48,2	D	22 56 ,5	O	lucido
Giu. 15	29,772	78,0	74,7	I	23 15 ,5	N.E	Cielo bello, aere netto
22	30,042	76,5	74,6	D	22 54 ,0	N.E	Cielo bello, aere netto
Dic. 10	29,884	60,0	53,6	I	23 16 ,0	E	Cielo coperto di densa neb. aere grosso e umido
12	29,762	60,0	52,3	D	23 6 ,0	S.O	Cielo lucido, aere netto
14	29,730	59,3	57,2	I	23 18 ,0	N.O gagl.	Cielo misto-vario, aere netto ma agitato
17	29,620	55,4	52,6	D	23 3 ,0	O	Cielo bello, aere puro e netto e quieto
19	29,652	59,8	57,5	I	23 19 ,0	S.O	Cielo coperto di neb., aere denso, ma poco umido

Risultati

1802 Dai 25 Nov. ai 31 Dic. oss.	7 . . .	5° 43′ 20″,4	.	1804 .	5° 43′ 3″,2
1803 Dal 1° ai 20 Settembre	12 . . .	43 14,7	. . .		43 6 ,0
Dai 5 ai 16 Marzo	4 . . .	43 8,0	. . .		43 8 ,0
Dai 10 ai 19 Dicembre	5 . . .	43 5,4	. . .		43 5 ,4

Medio delle due parallassi { 0 . . . . 5° 43′ 7″,05
Minima . . . 43 4 ,30

Delle 34 osservazioni riportate nell'appendice al Catalogo pag. 8, non ho considerate che le sole di Dicembre 1802, le altre tutte essendo verso la parallasse *zero* di Marzo. Ma se le medesime si riducano ai 15 di detto mese, supposta la parallasse di 3″, si troverà il loro medio prossimamente uguale all' altro, che danno le osservazioni susseguenti, corrispondenti allo stesso tempo,

§. 6

Arturo

Questa stella è stata replicatamente osservata in poca distanza dalle parallassi massima, e minima, la prima delle quali cade ai 24 Maggio, e la seconda ai 24 Novembre. Ma generalmente le osservazioni tutte non indicano alcuna parallasse sensibile, comunque il movimento proprio di due secondi circa per anno possa sembrare un non picciolo indizio del contrario.

Gior-

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate di Arturo dal Zenit	Venti	Stato del Cielo
1803							
Mag. 30	30,050	72,5	66.0	I	17° 54' 0",0	S.O	Cielo bello
31	29,980	73,8	67.4	D	53 40 ,5	E	bello
Giu. 1	29,964	74,8	68,3	I	53 58 ,5	E	bello
2	30,000	74,2	68,5	D	53 41 ,0	E	bello
3	29,924	75,4	68,7	I	53 58 ,5	E	bello
4	29,870	78,8	74,4	D	53 40 ,0	S.E	bello
Dic. 6	29,606	55,1	51,8	I	54 10 ,5	N.O	nuvoloso
10	29,900	50,2	48,0	D	53 58 ,0	O	nuvoloso
12	29,840	54,2	53,0	I	54 13 ,0	S.O	pieno di nuvole
18	29,840	60,3	56,3	D	54 0 ,5	O	bello
19	29,872	61,5	60,6	I	54 13 ,0	S	coperto di nebbia
1804							
Mag. 10	29,856	68,6	60,0	I	54 17 ,5	O	Cielo lucido, aere netto
11	29,876	69,0	60,2	D	54 0 ,0	S.O	Cielo bello, aere umido
12	29,740	71,0	67,3	I	54 17 ,5	S.S.O forte	Cielo bello, aere fosco e secco
13	29,860	71,8	60,2	D	54 2 ,0	S.O	Cielo lucido, aere netto
14	29,910	69,6	62,2	I	54 18 ,0	S.O	Cielo bello, aere netto
15	29,896	69,5	60,0	D	54 1 ,0	S.O	Cielo nebbioso, aere umido
25	29,820	71,5	65,5	I	54 17 ,5	S.O	Cielo neb., aere assai umid.
26	29,842	72,0	66,7	D	53 56 ,0	S.O	Cielo bello, aere umido e netto
27	29,854	73,3	67,2	I	54 19 ,0	S.O	Cielo bello, aere fosco umido e caldo
29	29,908	74,0	68,5	D	53 57 ,0	S.O	Cielo bello, aere umido e caldo
30	29,900	74,5	67,7	I	54 19 ,0	S.O	Cielo bello, aere netto
Dic. 4	30,084	53,8	48,5	I	54 28 ,0	O	Cielo nebbioso, aere netto
7	29,422	59,5	59,3	D	54 16 ,3	S.S.O	Cielo bello, aere un po fosco ma quieto

Risultati

1792	Dai 7 ai 18 Maggio	os. 9	20° 16'23",3		
1793	. . . . .		20° 16 4 ,5		Parallasse minima
1793	Dagli 8 ai 17 Dicemb.	7 . . 16 ,4	7 . . 16 4 ,7		Parallasse massima
1803	Dai 30 Maggio ai 4 Giugno	os. 6	20	12 51 ,4	Parallasse massima
	Dai 6 ai 19 Dicembre	5		12 50 ,8	Parallasse minima
1804	Dai 10 ai 30 Maggio	os. 11	20	12 34 ,3	Parallasse massima
	Ai 4 e 7 Dicembre	2		12 32 ,0	Parallasse minima

Le osservazioni del 1804 potrebbero dar luogo a dubitare di qualche parallasse: come però quelle di Dicembre non sono che due, ed i termometri differiscono di 8°, ed i Barometri di 0,6 di pollice, non si può farne alcun caso: e tanto più, che quando la differenza tra le due parallassi massima e minima non giunge almeno a tre secondi, col mio cerchio niente ardisco decidere.

§. 7.

Wega

Da sei osservazioni dai 6 ai 16 Giugno 1791 comparate con 4 dai 2 Gennajo ai 9 Febbrajo 1792, le quali si possono vedere nel primo volume della Specola Astronomica, (pag. 64, e seguenti) si ha per differenza 3", per cui la declinazione dedotta dalle prime è maggiore dell' altra, che si ha dalle seconde. Riducendo quindi le une e le altre supposta la parallasse di 2", ai tempi della parallasse massima e minima, delle quali la prima è ai 27 Giugno, e la seconda ai 27 Dicembre, la loro differenza risulta di 4" circa. Le medesime osservazioni di Gennajo 1792 comparate con altre cinque dello stesso anno dai 15 ai 19 Giugno danno prossimamente la stessa differenza. Dal 1792 al 1802 questa stella non è stata osservata, che in Luglio degli anni 1793 e 1794, e le declinazioni che ne ho conchiuso non sono pienamente d' accordo colle precedenti. Per la qual cosa mi proposi di tentare nuove osservazioni, e da Giugno 1803 a Dicembre 1804, intervallo, nel quale due volte cade la parallasse massima,

e due

e due la minima, osservai ciascuna volta e l'una e l'altra il più diligentemente che mi fosse possibile. Le osservazioni del 1803, e le altre di Gennajo e Giugno 1804 confermarono la sospettata parallasse di 2″, ed io quasi non sapeva più dubitarne. Siccome però trattavasi di una quantità sì picciola, mi feci a riandare tutte le possibili cause, che mai per avventura potessero cagionare qualche errore; ed una, su cui per verità non mi era mai caduto alcun dubbio, mi parve che meritasse di esser presa in considerazione. Le divisioni del Cerchio sono illuminate da un riflettore, che in tempo di notte riceve la luce da una lanterna, e in tempo di giorno da una finestra, che giace quasi nella direzione del meridiano. Quando le distanze che si osservano sono un po' lontane dal Zenit, la luce della finestra cade direttamente sul riflettore, senza incontrare alcun ostacolo, ma al Zenit o in poca distanza dal medesimo, viene essa impedita dal telescopio, nè può riceversi dal riflettore che obliquamente, e talora con difficoltà si giunge a rendere le divisioni chiare e distinte. Le osservazioni pertanto di Dicembre e Gennajo essendo in tempo di giorno, ed avendo io sempre lette le distanze colla sola luce della finestra, mi venne in pensiero, che la luce obliqua potesse indurre qualche parallasse sulle divisioni, e renderne viziosa la lettura. Non lasciai di tentare ben tostò varj saggi, i quali confermarono pur troppo i miei dubbj: poichè sebbene talora il micrometro segnasse lo stesso secondo, e parte di secondo, o mi valessi della luce della finestra, o facessi uso della lanterna; il più delle volte però la lettura colla luce della finestra non corrispondeva all' altra; anzi alcuna volta variava, variando le inclinazioni e posizioni del riflettore. Per la qual cosa nelle osservazioni di Dicembre 1804 non volli altrimenti valermi della luce della finestra, ma di quella bensì della lanterna, sulla quale non può cadere alcuna incertezza, potendosi ricevere dal riflettore nella maniera, che più conviene. Da queste osservazioni pertanto si ha la medesima declinazione a un di presso, che generalmente ho sempre trovato colle osservazioni di Giugno e Luglio. Quantunque però venga quindi a togliersi quasi intieramente ogni sospetto di parallasse sensibile,

non

non credo, che si debbano dell' intutto rigettare le osservazioni che sembrano indicarla; ma che convenga istituirne delle nuove: e ciò tanto maggiormente, che le ultime sono state fatte essendo l'aere nebbioso, agitato dai venti, e la stella sempre tremola.

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate di Wega dal Zenit	Venti	Stato del Cielo
1803							
Giu. 27	29,970	73,3	64, 5	D	0°29'48",0	S	Cielo coperto
30	30,000	77,0	68, 0	I	29 32 ,5	S.O	nebbioso
Lug. 1°	29,958	76,5	67, 0	D	29 50 ,0	S.O	lucido
2	29,950	77,8	69, 5	I	29 33 ,0	S.O	bello
3	30,050	77,4	70, 0	D	29 48 ,0	S	pieno di nebbia
4	30,130	78,2	69, 2	I	29 33 ,5	S.O	quasi bello
5	30,050	78,5	70, 0	D	29 47 ,5	S.O	bello
6	29,876	78,0	72, 5	I	29 33 ,5	O	bello
7	29,744	79,4	72, 6	I	29 32 ,0	S.E	nebbioso
8	29,850	79,0	71, 5	D	29 54 ,0	E	nuvoloso
9	29,962	79,0	75, 0	I	29 34 ,0	S.O	bello
10	30,020	79,2	71, 8	D	29 53 ,5	S.O	bello
17	29,798	80,6	73, 0	I	29 34 ,0	N.O	pieno di nuvole
19	29,820	80,4	72, 8	D	29 56 ,0	S.O	bello
20	29,834	80,2	74, 5	I	29 38 ,0	N.E	nuvoloso
21	29,890	81,0	74, 5	D	29 57 ,0	S.O	lucido
22	30,020	80,8	75, 0	I	29 36 ,0	S.O	lucido
23	30,010	80,2	74, 5	D	29 57 ,0	S.O	lucido
Ott. 8	29,712	73,8	72, 3	I	29 44 ,0	S.O	quasi tutto coperto
9	29,420	76,5	76, 8	D	30 13 ,5	S.O fortis.	quasi tutto coperto
10	29,620	72,4	64, 6	D	30 14 ,0	N.O fortis.	pieno di nuvole
11	29,900	70,2	65, 5	I	29 39 ,5	N.O	pieno di nuvole
12	29,920	70,5	63, 7	I	29 39 ,5	N.E	bello
13	30,110	68,0	67, 0	D	30 14 ,0	N.E	lucido
14	30,040	67,0	62, 7	I	29 39 ,5	N.E	bello

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate di Wega dal Zenit	Venti	Stato del Cielo
1804							
Gen. 9	29,950	59,1	56, 0	D	0°29'45, 0"	S.O	quasi coperto
12	30,018	56,0	53, 6	I	29 24 ,0	O	bello
13	30,080	57,5	60, 2	D	29 45 ,0	S.O	nuvoloso
14	30,010	59,3	63, 4	I	29 24 ,5	S.O	nuvoloso
Giu. 25	30,032	78,0	78, 0	D	29 57 ,5	S O	Cielo lucido, aere netto
26	30,030	78,0	70, 0	I	29 34 ,0	E	Cielo lucido
27	29,916	79,0	72, 3	D	29 56 ,0	S.E	Cielo bello, aere secco e denso
29	29,784	82,0	74, 6	I	29 35 ,0	S forte	Cielo bello aere fosco
30	29,926	82,2	76, 7	D	29 56 ,5	S.O	Cielo bello, aere fosco
Lug. 1	29,940	80,1	77, 2	I	29 33 ,5	S.O	Cielo bello
2	30,080	81,2	78, 9	D	29 53 ,0	S.O	bello, aere netto
3	29,900	83,0	80, 0	I	29 35 ,0	S.O	lucido
4	29,780	85,0	80, 6	D	29 59 ,0	S.E	bello
5	29,874	83,0	82, 5	I	29 36 ,0	S.O	lucido
6	29,876	82,4	73, 6	D	30 0 ,0	S.O	lucido
Dic. 17	29,620	54,5	54, 5	I	29 42 ,5	N.O	Cielo bello, aere netto
19	29,706	60,0	63, 5	D	30 0 ,0	O	Cielo nebbioso, aere fosco
20	29,590	60,4	65, 2	I	29 43 ,0	S.O	Cielo misto aere fosco neb., e agitato
21	29,358	63,8	67, 6	D	29 59 ,0	S.S.O	Cielo nuvoloso, aere denso e fosco
22	29,490	62,8	66, 5	D	29 59 ,0	S.S.O	Cielo nebbioso, aere denso e calmo, l'orizzonte ingombro
24	29,668	61,0	60, 6	I	29 40 ,0	O	Cielo bello, aere un po fosco
27	29,640	61,7	69, 6	D	29 56 ,5	S.S.O forte	Cielo nebbioso, aere fosco
28	29,540	64,9	70, 2	I	29 39 ,5	S.S.O forte	Cielo nebbioso, aere fosco e agitato
29	29,750	65,0	66, 2	D	29 58 ,0	S.O	Cielo nebbioso aere, fosco, grosso, e umido.

Risultati

1803	Dai 30 Giugno ai 10 Luglio oss. 11	38° 36′ 31″,2	1804	38° 36′ 34″,1	Par. massima
	Dagli 8 ai 14 Ottobre oss. 7	36. 29, 6		36. 32,5	Parall. o
1804	Dai 9 ai 14 Genn. oss. 4			36 30, 8	Par. minima
	Dai 25 Giugno ai 5 Lug. 10			36 35, 1	Par. massima
	Dai 17 ai 29 Dicem. oss. 9			36 35 ,1	Par. minima

Giorni

§. 8.

Atair

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate di Atair dal Zenit	Venti	Stato del Cielo
1803							
Lug. 17	29,790	80,8	72,0	I	29° 44' 50'', 0	N.O	Cielo nuvoloso
19	29,812	80,2	72,5	D	44 29 , 0	S.O	bello
20	29,820	80,0	72,3	I	44 48 , 0	N.E	pieno di nuvole
21	29,900	80,8	73,0	D	44 30 , 0	S.O	lucido
22	29,998	80,2	72,5	I	44 48 , 0	S.O	lucido
23	29,980	79,8	72,0	D	44 28 , 5	S.O	lucido
27	29,912	83,0	77,0	I	44 46 , 0	E	lucido
28	29,914	83,7	79,0	D	44 28 , 0	S.E	nebbioso
29	29,952	83,8	78,0	I	44 48 , 0	N.O	pieno di nuvole
Agos. 1	29,950	81,9	77,8	D	44 27 , 0	E	bello
2	29,900	82,0	75,5	I	44 43 , 0	N.E	bello
3	29,916	81,5	77,0	D	44 30 , 0	E	bello
4	29,998	82,0	76,8	I	44 47 , 0	S.O	bello
1804							
Gen. 23	30,050	57,3	58,5	I	44 51 , 5	E	nebbioso
24	30,050	57,0	57,4	D	44 23 , 0	N.E	bello
28	29,936	63,5	67,5	I	44 50 , 0	S.O	quasi oscuro
29	30,050	61,8	59,6	D	44 26 , 0	S.O fortiss.	pieno di nuvole
30	30,132	60,2	58,5	I	44 51 , 3	S.O	bello
31	30,016	58,0	58,5	D	44 22 , 0	O	lucido
Ago. 13	29,816	82,0	76,0	I	44 34 , 0	S.O	Cielo lucido, aere netto
14	29,836	82,1	75,0	D	44 10 , 0	S.O	Cielo bello, aere un po fosco
15	29,916	82,7	73,8	I	44 36 , 0	N.E	Cielo bello, aere un po fosco
16	29,926	82,6	74,6	D	44 10 , 0	N.E	Cielo bello, aere fosco
17	29,834	83,0	74,5	I	44 33 , 5	N.E	Cielo bello, aere quasi netto
Dic. 19	29,690	60,2	61,0	I	44 27 , 5	O	Cielo nebbioso, aere fosco e um.
24	29,644	62,0	61,7	D	44 14 , 5	O	Cielo bello, aere un po fosco
29	29,770	65,0	67,2	I	44 30 , 0	S.O forte	Cielo nebbioso, aere fosco, denso e umido.

Ri-

Risultati.

Non cadono queste osservazioni nei tempi precisamente, ai quali corrispondono le parallassi massima e minima; ma non ne sono insieme così lontane, che non si possa riconoscere, se questa stella abbia o non abbia parallasse sensibile.

Dalle osservazioni del 1803 ridotte al 1804, le quali non sono distanti dalla parallasse massima, (che cade ai 28 Giugno) che di 22 giorni, si ha . . . 1804 ... 8".21'.40",8

Dalle altre di Gennajo, distanti dalla minima (che succede ai 28 Dicembre) di un mese circa . . . 21. 43 ,7

Da quelle di Agosto vicine poco meno delle prime alla parallasse massima . . . . . 21. 42 ,2

Finalmente dalle osservazioni di Dicembre 1804 . . . 21. 43 ,5

Le picciole differenze, che si hanno da questi diversi risultati non indicano affatto parallasse alcuna, essendo anzi contrarie alle leggi della medesima; e quindi da attribuirsi agli errori probabili delle osservazioni.

§. 9.

Oltre le stelle sin quì esaminate, altre similmente meritano di esser prese in considerazione, e principalmente Rigel, Antares, Deneb, e Fomalhaut. Ma intorno ad esse non ho intrapreso ricerca alcuna. Generalmente le osservazioni di giorno riescono in questo Clima piuttosto difficili, e divengono maggiormente quando sono legate a certi tempi. Rari quì sono i giorni, nei quali l'aere sia perfettamente puro e sereno: è per lo più ingombro di un leggierissimo velo di nebbia, che se non impedisce del tutto di vedere le stelle di prima e seconda grandezza, e quelle di terza vicine al zenit, le rende però così deboli e sbiadate, che non è agevole osservarle con precisione. Per questa ragione principalmente le osservazioni discusse in questa memoria non sono nè nel numero nè nei tempi, che avrebbero potuto condurre a risultati sicuri; e per questa ragione medesima m' è più volte ca-

caduto nell' animo di abbandonare per sempre simile genere di ricerche. Nè certamente le avrei proseguite, se Aldebaram, Sirio, Procione, e Wega non mi avessero presentati sufficienti indizj di una parallasse abbastanza sensibile per potersi osservare. Quest' indizj medesimi, e tuttavia sussistono, e non sono per avventura spregevoli: per lo che di queste quattro stelle, e non più, continuerò le osservazioni col maggiore zelo, cogliendo tutt' i momenti più favorevoli, e persistendo nel travaglio oltre quei termini, che in un cielo migliore sarebbe necessario. Se intorno ad esse potrò cosa alcuna stabilire con sicurezza e precisione, mi farò allora ad esaminarne le conseguenze, ed oserò proporre qualche mia congettura, che ardita ed immatura potrebbe presentemente sembrare.

SUP-

SUPPLEMENTO

Di Giuseppe Piazzi

ALLA MEMORIA DEL MEDESIMO SULL' OBBLIQUITA' DELL' ECLITTICA

Ricevuto il dì 29 del 1805.

§. 1.

Essendomi proposto nella Memoria sull' Obbliquità dell' Eclittica inserita nel tomo XI pag. 426 della nostra Società, di stabilire quest' elemento con la maggiore precisione e sicurezza, non contento di un decennio di osservazioni mie proprie, volli giovarmi ancora di quelle di Greenwich. Ma non picciola fu la mia sorpresa, quando tra i risultati di esse ed i miei m' avvenni in una differenza di 4″ circa. Esaminai onde ciò potesse nascere, e dopo varie ricerche mi parve averne trovata certa quale spiegazione, che indicai nell'accennata Memoria, senza però rimanerne pienamente soddisfatto. Volli quindi scriverne allo stesso Dottor Maskelyne, il quale usando meco della gentilezza che gli è sì propria, in data dei 29 Gennajo 1804 mi replicò „ Per determi- „ nare l' errore della linea di collimazione impiegai nel 1787 le „ distanze dal zenit delle stelle ai piedi dei Gemelli. Ho ricono- „ sciuto in seguito che questo metodo non è il più sicuro, e che „ conviene assai meglio contentarsi de' risultati delle stelle vici- „ ne al zenit. Da 15 osservazioni pertanto di γ Dragone si ha „ + 1″, 6 in luogo di + 6″, che aveva trovato colle stelle ai pie- „ di dei Gemelli ... Questa correzione di + 1″,6, dalla parte del „ Sud è per le osservazioni del 1787 al 1799, per le altre dal „ 1800 al 1803 è + 0″, 9 „ Impiegando questa nuova correzione di + 1″, 6 in vece di + 6″, che introdussi nel primo calcolo del-

delle osservazioni dal 1790 al 1799, svanisce quasi intieramente la differenza tra le due obbliquità; si ritrova un poco maggiore colle altre degli anni susseguenti 1800, 1801, 1802; ma il medio di tutte risulta prossimamente lo stesso di quello che si è da me stabilito. Prima però di mostrare un tale accordo, gioverà riportare le mie osservazioni solstiziali di quest'anno 1804, le quali essendo state fatte colla più scrupolosa diligenza, ed in numero maggiore che non abbia usato negli anni precedenti, sembrano meritare una maggiore fiducia. Sull'esempio di altri Astronomi potrei contentarmi di dare i soli risultati, ma, a creder mio, le osservazioni semplici e genuine sono la cosa più interessante e preziosa, che possa presentare un Astronomo.

§. 2.

Solstizii del 1804 osservati nella Specola di Palermo.

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate dal Zenit del lembo inferiore del Sole	Distanze osservate dal Zenit del lembo superiore del Sole	Circostanze delle osservazioni	Venti	Stato del Cielo e dell'aria
Giu. 2	29,912	74, 0	73, 3	I	16°10'20",0	15°38'34",0		E	Cielo nebbioso, aere fosco
3	29,960	74, 2	73, 2	D	16 2 24 ,5	15 30 36 ,5		S.O	C. bello, aere un poco fosco
4	30,008	74, 0	72, 7	I	15 55 35 ,5	15 23 51 ,5		S.O	Cielo neb., aere fosco, e um.
5	30,090	75, 0	74, 5	D	15 48 16 ,0	15 16 37 ,0		S.O	Cielo bello, aere netto
6	30,090	76, 8	76, 3	I	15 42 18 ,5	15 10 36 ,0		E	C. neb., aere fosco e secco
7	30,000	77, 8	75, 6	D	15 35 55 ,5	15 4 11 ,0		S.O	Cielo bello, aere netto
8	29,884	79, 9	78, 2	I	15 30 38 ,0	14 58 57 ,0		S.O	C. bello, aere netto e caldo
9	29,850	80, 3	79, 8	D	15 25 1 ,5	14 53 20 ,5		E	C. neb., aere caldo e denso
10	29,930	81, 1	77, 3	I	15 20 37 ,0	14 48 56 ,0		E	C. bello, aere fosco e caldo
11	29,968	81, 0	78, 8	D	15 15 49 ,0	14 44 10 ,0		E	C. cop. di n., ae. caldis. e sof.
12	29,900	81, 4	83, 3	I	15 12 11 ,0	14 40 27 ,0		E	C. cop. di neb., ae. cal. e um.
13	29,900	81, 0	77, 4	D	15 8 17 ,0	14 36 36 ,0		S.O	C. bel., ae. fos., l'oriz. ingom
14	29,852	79, 8	74, 4	I	15 5 26 ,0	14 33 45 ,0		N.E	C. neb., aere pieno di vapori
15	29,790	77, 2	74, 4	D	15 2 13 ,5	14 30 31 ,0		N.E	C. bello, aere limpido
17	29,800	76, 8	74, 0	I	14 58 19 ,0	14 26 38 ,0		S.O	C. neb., aere fosco ed umido
18	29,930	76, 9	75, 3	D	14 56 24 ,5	14 24 47 ,0		E	C. neb., aere fosco, ed umido
22	30,048	76, 2	74, 5	I	14 54 42 ,0	14 23 1 ,0		N.E	C. bello, aere quasi netto
23	30,030	76, 4	75, 5	D	14 54 46 ,5	14 23 13 ,0	Dubbia	S.O	Cielo nebbioso, aere fosco
24	29,976	76, 0	75, 5	I	14 56 9 ,0	14 24 25 ,5		N.E	Cielo bello, aere netto
25	30,008	77, 0	76, 0	D	14 57 3 ,0	14 25 27 ,0		S.O	C. neb., aere fosco e denso
26	30,050	78, 3	78, 0	I	14 59 17 ,0	14 27 35 ,0		S.O	Cielo bello, aere fosco
27	30,000	78, 8	78, 0	D	15 1 0 ,5	14 29 23 ,0		E	Cielo bello, aere fosco

Giorni del Mese	Barometro	Termometro Interiore	Termometro Esteriore	Posizione del Cerchio	Distanze osservate dal Zenit del lembo inferiore del Sole	Distanze osservate dal Zenit del lembo superiore del Sole	Circostanze delle osservazioni	Venti	Stato del Cielo e dell' aria
Giu. 28	29,832	81 , 3	81, 3	I	15° 3'57",5	14°32' 8',5		S.E	C. bello, aere secco e denso
29	29,740	31 , 6	84, o	D	15 6 33 ,5	14 34 57 ,5		S.E forte	C. bell. aere denso e agitato
30	29,926	82 , 2	76, 7	I	15 10 23 ,6	14 38 43 ,5		S.O	Cielo bello, aere fosco
Lug. 1	29,940	80 , 1	77, 2	D	15 13 44 ,0	14 42 6 ,0		S.O	Cielo bello
2	30,080	80 , 3	78, 6	I	15 18 19 ,5	14 46 40 ,5		S.O	Cielo bello, aere netto
3	29,900	83 , 0	82, 5	D	15 2 35 ,5	14 50 55 ,0		S.O	Cielo bello, aere fosco
4	29,790	85 , 2	85, 2	I	15 27 57 ,5	14 56 19 ,5		S.S.O	Cielo nebbioso, aere fosco
5	29,980	84 , 2	82, 5	D	15 33 3 ,5	15 1 26 ,0		S.E	C. bello, aere fosco e caldo
6	29,886	83 , 0	80, 0	I	15 29 16 ,5	15 7 33 ,0		S.O	Cielo lucido, aere netto
7	29,830	83 , 2	85, 2	D	15 45 2 ,5	15 13 22 ,5		S.O	Cielo lucido, aere netto
8	29,783	85 , 2	85, 0	I	15 52 1 ,0	15 20 17 ,0		S.O	Cielo lucido, aere netto
9	29,806	85 , 2	84, 0	D	15 58 37 ,0	15 27 0 ,0		S.O	Cielo lucido, aere netto
10	29,881	83 , 0	81, 2	I	16 6 22 ,0	15 34 45 ,0		S.O	Cielo lucido, aere netto
Dic. 3	29,946	59 , 3	58, 2	I	60 29 57 ,0	59 57 17 ,0	Sole malterminato	N.O	Cielo misto, aere netto
5	30,050	54 , 2	51, 5	D	60 45 49 ,5	60 13 10 ,5	Appena visibile	O	C. cop. di nebbia, aere um.
6	29,730	57 , 4	63, 0	I	60 53 31 ,5	60 20 10 ,0	Tremolo e fiammegg.	S.O fortis.	Cielo coperto, aere agitato
8	29,430	60 , 0	63, 0	D	61 6 37 ,0	60 34 0 ,0	Fiammegiante	S.O	C. misto, aere fosco, e denso
9	29,480	58 , 5	58, 0	I	61 12 54 ,5	60 40 18 ,5	Appena visibile	S.S.E	C. cop , aer. fosco den. e um.
10	29,800	59 , 5	63, 0	D	61 18 12 ,0	60 45 36 ,0		E	C. misto, aere un po fosco
11	29,856	60 , 0	61, 0	I	61 23 36 ,5	60 50 53 ,0		S.O	C. misto, aere fosco e denso
13	29,760	60 , 1	61, 2	D	61 32 12 ,0	60 59 34 ,0	Tremolo	S.O	Cielo lucido, aere netto
14	29,720	60 , 3	62, 2	I	61 36 18 ,0	61 3 34 ,0	Fiammegiante	O.S.O	C. misto, aere denso e umido
15	29,670	59 , 2	59, 0	D	61 39 18 ,0	61 6 42 ,0	Con vento impetuoso	N.O gagli.	C. misto vario, aere agitato
17	29,620	54 , 3	54, 5	I	61 44 44 ,5	61 12 4 ,0		N.O forte	C. misto vario, aere agitato
18	29,562	56 , 2	59, 2	D	61 46 20 ,0	61 13 42 ,0	In mezzo alle nuvole	O.S.O	C. coperto, aere denso e um.
19	29,704	59 , 2	62, 5	I	61 48 8 ,5	61 15 24 ,0		O	C. nebbioso, aere fosco e um.
20	29,590	60 , 4	65, 2	D	61 48 43 ,5	61 16 3 ,0	Fiammeggiante	S.O	C. nuv., aere fosco e denso
21	29,358	63 , 8	67, 6	I	61 49 33 ,0	61 16 50 ,5		S.S.O	C. nuv., aer. fosco denso e um.
22	29,490	62 , 8	66, 5	D	61 49 10, 5	61 16 32 ,5		S.S.O	C. nebb., aere denso e fosco
23	29,664	61 , 7	63, 6	I	61 49 5 ,5	61 16 21 ,0		O.S.O	C. misto, aere fosco e umido
24	29,668	61 , 0	60, 6	D	61 47 47 ,0	61 15 6 ,0		O	C. bello, aere un poco fosco
26	29,780	59 , 3	62, 0	I	61 44 52 ,0	61 12 10 ,0	In mezzo alle nuvole	S.O	C. coperto, aere fosco e um.
27	29,640	61 , 7	69, 6	D	61 42 12 ,0	61 9 34 ,0		S.SO forte	Cielo nebbioso, aere fosco
28	29,540	64 , 9	70, 2	I	61 39 41 ,5	61 6 56 ,5		S.S.O forte	C. nebb., aer. fosco e agitato
29	29,750	65 , 0	66, 2	D	61 36 3 ,0	61 3 22 ,0		S.O	C. nebb., aere denso e um.
	Distanze dal Zenit di Antares								
Dic. 11	29,790	60 , 0	60, 4	I	64 4 5 ,0			S.O	C. nebb. , aere net. e quieto
12	29,764	59 , 8	60, 4	D	3 48 ,5			S.O	C. lucido, aere netto
22	29,680	61 , 6	61, 0	I	4 10 ,0			O	Cielo bello, aere netto
23	29,694	60 , 3	60, 0	D	3 50 ,0			O	Cielo lucido, aere netto

§. 3.

Risultati delle precedenti osservazioni.

Solstizio Estivo		Medii	Solstizio Jemale	
Giorni del mese	Obbliquità apparente		Giorni del mese	Obbliquità apparente
Giu. 2— 3	23°28'4",4	Medio dei risultati estivi .	Dic. 3— 5	23°27'49",8
3— 4	28 2, 1	23° 28' 1",41	5— 6	27 46 ,0
4— 5	28 3, 3	Nutazione . . . . . — 5 ,58	6— 8	27 51 ,6
5— 6	28 4, 3	1804 Obbl. media 23.27 55,83	8— 9	27 55 ,1
6— 7	28 2, 7	Medio dei risultati Jemali	9—10	27 54 ,2
7— 8	28 4, 3	23 27 53, 09	10—11	27 52 ,7
8— 9	28 5, 0	Nutazione . . . . . — 4, 32	11—13	27 51 ,7
9—10	28 3, 1	Obbl. media . . . 23 27 48, 77	13—14	27 52 ,8
10—11	28 1, 7		14—15	27 54 ,7
11—12	28 2, 7		15—17	27 55 ,5
12—13	28 0, 7		17—18	27 54 ,0
13—14	27 58, 6		18—19	27 55 ,2
14—15	28 1, 6		19—20	27 49 ,9
15—17	28 1, 7		20—21	27 53 ,7
17—18	27 58, 6		21—22	27 53 ,0
18—22	27 58, 2		22—23	27 53 ,4
22—23	28 1, 0		23—24	27 53 ,6
23—24	28 1, 8		24—26	27 54 ,4
24—25	28 1, 7		26—27	27 56 ,4
25—26	28 0, 0		27—28	27 54 ,8
26—27	28 1, 0		28—29	27 52 ,4
27—28	28 1, 3			
28—29	28 1, 9			
29—30	28 0, 6			
Lug. 30— 1	28 2, 0			
1— 2	28 1, 5			
2— 3	28 2, 1			
3— 4	28 2, 2			
4— 5	27 59, 4			
5— 6	27 57, 7			
6— 7	27 59, 8			
7— 8	28 1, 5			
8— 9	28 0, 6			
9—10	27 58, 8			

§. 4.

Obbliquità media pel 1800

Obbliquità media dalle osservazioni del 1791 al 1803...1800	23° 27'	57"
1804, ridotta colla diminuzione annua di 0", 42		57
Dalle osservazioni di Greenwich dal 1790 al 1799, supposto l'errore della linea di collimazione + 1", 6		58
Dalle osservazioni di Greenwich degli anni 1800-1801-1802 pel 1802..23.27.55,6, ridotta colla diminuzione annua		56
Medio pel 1800	23.27	57

§. 5.

Confronto delle due obbliquità estiva e jemale osservate nel 1804 (§. 3)

Di 7" la prima è maggiore della seconda, quanto a un di presso ho trovato cogli altri Solstizj, ma un poco più di ciò, che da gran tempo altrove generalmente si osserva. Nella mia memoria sopraccitata mi sono studiato di ripetere la spiegazione di questo fatto dalle variazioni, che nelle diverse stagioni dell'anno succedono nell'Atmosfera, e le quali alterano le rifrazioni, senza che venga a cambiarsi lo stato del Barometro e del Termometro, soli mezzi sin'ora praticati per correggerle. Ma è egli poi veramente così? e non potrebbe piuttosto provenire questa differenza dall'essere costantemente le rifrazioni in tempo di giorno maggiori che in tempo di notte, malgrado che il Barometro conservi la stessa altezza, ed il Termometro indichi lo stesso grado di calore, come taluno ha pensato? o sarebbe mai la luce solare dotata di una maggiore rifrangibilità della luce delle stelle? Egli è certo che le rifrazioni medie non sono dedotte che dalle osservazioni delle stelle.

Da parecchie mie osservazioni di Sirio fatte in Marzo, essendo

do il Sole 15° sotto l' orizzonte si ha lo stesso risultato, che danno più altre fatte in Settembre, già nato il Sole. (Prendo questi due termini, perchè verso i medesimi corrisponde la parallasse o di questa stella). Similmente per Rigel ho trovato la stessa declinazione così con osservazioni fatte in Luglio poco dopo mezzodì, come con altre in Gennajo verso mezzanotte. Più altre stelle osservate di giorno e di notte, sebbene non egualmente lontane dal zenit che Sirio e Rigel, provano la medesima cosa. Non ho quindi alcun indizio, onde sospettare che rispetto alle stelle, siano le rifrazioni maggiori in tempo di giorno che in tempo di notte, come in seguito si scorgerà più chiaramente.

Pare quindi a me, che indipendentemente dalle indicazioni del Barometro e del Termometro, nè la stagione, nè il tempo, (sia di notte, sia di giorno) almeno sino a 64° dal vertice, possano indurre variazioni molto sensibili nelle rifrazioni; tolto il caso in cui il Termometro segni più di 80°, o spirino gagliardi venti di scirocco o mezzodì. Per la qual cosa non veggo altra causa, dalla quale ragionevolmente ripetere la differenza delle due obbliquità, se non se una maggiore rifrangibilità nella luce solare. Nella mia prima Memoria aveva provato, che la differenza delle due obbliquità non poteva farsi dipendere dalle rifrazioni medie del Bradley, credute dal Sig. De-La-Lande troppo picciole: rimane quest' asserzione nella sua piena forza, ma non è così di quanto ivi soggiugneva su l' azione dei diversi stati dell' Atmosfera. L' umidità, i venti, il fluido elettrico e le altre sostanze, delle quali l'aere è sempre impregnato, possono mutare le rifrazioni; ma il loro effetto deesi proporzionalmente manifestare su tutt' i raggi di luce, che per esso trascorrono, e nel risultato medio di un gran numero di osservazioni non cagionerà mai che ben picciole differenze; siccome in appresso m' ingegnerò dimostrare.

Questo mio pensiere sulla refrangibilità della luce solare, nato dal confronto delle osservazioni del Sole e di Antares, non so se con favore sarà da coloro accolto, i quali, con scrupolosa diligenza raccogliendo, ed a parte a parte esaminando tutte le cagioni, che influiscono o possono influire sulle rifrazioni, danno

gran peso ed estensione all' incertezza loro, e per essa vogliono spiegare la differenza delle due obbliquità. Noi non conosciamo, egli è vero, che imperfettamente le leggi che siegue il calore alle diverse distanze dalla superficie della terra; ignoriamo, pressochè intieramente, come si diffonda l' umidità nei diversi stati, e strati diversi dell'Atmosfera; non sappiamo similmente quale influenza possono avere le tante specie di sostanze aeriformi sulla forza rifrattiva dell' aria; e sono in fine cento altre cose che non sappiamo. Ma questa ignoranza nostra non c'impedisce d' investigare coll' osservazione per uno stato medio dell' atmosfera i limiti della risultante di tutti questi elementi, e di ben altri molti, se mai vi sono. All' orizzonte e in poca distanza dal medesimo, sebbene e lo stato del cielo, e la temperatura dell' aria non presentino cambiamenti considerevoli, le rifrazioni pur nondimeno osservandosi generalmente molto ineguali, i limiti dell'incertezza saranno sempre assai estesi, e quindi di niun' uso. Da 84° dal vertice salendo alle altre minori distanze non s'incontrano le medesime difficoltà; ma nè a questo grado, (che è la massima distanza a cui posso osservare a cagione dei monti, che giacciono nella direzione del meridiano) nè agli altri sino a 80° io ho ancora osservazioni, sulle quali possa sicuramente contare. A 80° le declinazioni di λ della Nave e di ζ. 1 e ζ. 2 dello Scorpione non offrono differenze maggiori di 4″. (Questa differenza e le altre che sieguono, si possono vedere nel Supplemento al mio catalogo). A 78° e 77° da A e ζ della Nave non si ha più di 3″. A 70° e 69° da ω della Nave e Fomalhaut, 3″, 5. A 67° da ε Can Maggiore ed *i* dell' Idra, 2″, 5. A 64° da δ Can Maggiore e da Antares, 2″. A 62° da α Corvo, 1″. A 60° da δ Scorpione, 1″. Questi risultati sono confermati da più altri dipendenti da osservazioni posteriori alla pubblicazione del mio Catalogo, e nei quali, non avendo preso in considerazione che le sole tentate, non spirando nè venti gagliardi, nè segnando il Termometro più di 80°, meritano una maggiore confidenza. A tutto ciò se si aggiunga che nelle riferite differenze sono compresi ancora gli errori inevitabili così dell' osservazione come dello Stromento; agevol-

men-

mente si scorgerà, e che la risultante di tante leggi ed influssi, che noi non sappiamo, e per cui si fa sì gran rumore, è in fine una ben picciola cosa; e che non si può in verun modo da ciò che si osserva all' orizzonte, o due in tre gradi sopra lo stesso, argomentare di quello che accade, o può accadere nelle regioni superiori dell' Atmosfera. Le sole osservazioni possono decidere un tal genere di questioni, ed un buono stromento nelle mani di un buon osservatore coglierà sempre meglio nel vero, che le teorie di tutt' i Geometri, e di tutt' i Fisici. Che se dalle osservazioni dei Cassini e di qualche altro Astronomo si raccolgono conseguenze diverse dalle mie, mi si permetta che francamente dica, che le medesime si debbono piuttosto attribuire all' imperfezione degli Stromenti de' quali si sono serviti, che all' incostanza ed irregolarità delle rifrazioni. Raccogliendo pertanto dal sin quì esposto ciò che risguarda il punto di cui si tratta, non credo andar lontano dal vero, se a 64° stabilisco di 2″ i limiti dell' incertezza: limiti tra i quali non può certamente restringersi la differenza di 7″ in 8″ da me osservata tra le due obbliquità estiva e jemale. Non dee quindi parere tanto strana la congettura, che, se non tutta, parte almeno di questa differenza provenga da una maggiore refrangibilità nella luce solare. La quale maggiore refrangibilità possiam ancora rilevarla dalle circostanze diverse (rispetto a noi) della luce del Sole, e delle stelle. Sebbene la luce del Sole impieghi 8′ circa a venire a noi, nientedimeno, considerate le distanze nelle quali noi siamo così dal Sole come dalle Stelle; la propagazione della luce solare si può riguardare come istantanea, e in tempo quella delle stelle. Ma i sette raggi onde risulta la luce, non essendo tutti egualmente refrangibili, non avranno tampoco una medesima velocità. Della luce delle stelle non verranno dunque a noi che i più forti, e che meno differiscono in refrangibilità: gli altri, quando essi pur vi giungano, non potranno nè far parte coi primi, nè cagionare sulla retina alcuna impressione distinta, ma si confonderanno coll'azzurro del Cielo. Oltrecchè non è del tutto improbabile che, attesa l' immensa tenuità loro, e l' immenso spazio che debbono trascorrere, (che

non

non possiamo supporre vuoto affatto di qualsisia altro fluido, comunque si voglia sottilissimo), una porzione delle particelle più rifrangibili realmente si disperda, nè giunga sino a noi, nè forse sino ai confini del nostro Sistema. La rifrangibilità media della luce delle stelle par dunque possa dirsi minore della rifrangibilità media della luce Solare. Ma un'altra difficoltà voglio qui prevenire, che forse potrebbe farmisi non senza qualche apparenza di fondamento. La differenza massima dei diversi risultati dell' obbliquità jemale da me sopra riportati giugnendo sino a 12″, come si può egli pensare a rendere ragione di soli cinque in sei, per cui l'obbliquità estiva eccede la jemale? Non basta ciò a dimostrare la ineguaglianza ed incertezza delle rifrazioni, e quindi la cagione vera della differenza delle due obbliquità? La differenza dei diversi risultati dell'obbliquità non proviene essa certamente dall' incostanza delle rifrazioni; ma bensì dalla difficoltà di porre esattamente il lembo del Sole (non sempre ben terminato, talora tremolo, talora fiammeggiante, e talora tra le nuvole) in contatto del filo orizzontale. E veramente tra i risultati dell' obbliquità estiva la differenza massima è di 6″, i quali a 13° dal vertice non si possono in verun modo rifondere nell' ineguaglianza delle rifrazioni. Nè dee far peso che questa differenza sia di soli sei secondi, mentre l'altra giunge a 12″. Nell' inverno i bordi del Sole sono generalmente sempre più incerti che nella state. Per altro di ventuno risultati dell' obbliquità jemale quattro soli presentano sì gran discordanza; gli altri diecisette non differiscono tra di essi che di due circa, siccome il maggior numero di quei di estate.

Se pertanto la luce solare è più rifrangibile della luce delle stelle, nello stabilire l'obbliquità dell'Ecclitica, sia con gli solstizj estivi sia colli jemali, converrà sempre tener conto di questo nuovo elemento. Egli è perciò necessario conoscerne esattamente la sua quantità; nè si potrà giugnere a ciò, se prima non si sappia con precisione la differenza tra le due obbliquità, estiva e jemale. I Sigg. Slop e Chiminello con le loro osservazioni hanno ritrovato 4″, La Lande a Parigi 7″; dai solstizj di Greenwich dal

dal 1790 al 1799, prendendo il medio, si ha 5″, dai miei finalmente 8″. La maggiore di queste differenze si è la mia, la quale eccede di 3″ quella di Greenwich. Ciò mi ha fatto più volte pensare, che l'altezza del Polo da me stabilita nel 1791 di 38° 6′ 44″,0 fosse per avventura più esatta dell' altra, che su nuove osservazioni adottai nel 1793 di 38° 6′ 45″,5. Ho esaminato osservazioni e calcoli, e tutto pesato, non mi è sembrato che vi fosse luogo a nuove correzioni. Nel che sono stato confermato dalle distanze dal zenit di γ Dragone osservate, a Greenwich nel 1802 e 1803, che nel passato Agosto si compiacque comunicarmi il Dott. Maskeline. Dalle medesime comparate colle mie fatte in diversi tempi, e replicate nel 1804, risulta la differenza in Latitudine dei due osservatorj 13° 21′ 54″, 54, quantità che aggiunta a 38° 6′ 45″,5 dà esattamente la latitudine stabilita per Greenwich. Per la qual cosa sebbene impiegando la latitudine del 1791, la differenza delle due obbliquità non verrebbe che di 5″, e sarebbe quindi di accordo colle osservazioni di Greenwich, e colle mie, sostituendo all' altezza del Polo le distanze dal vertice di Antares, e da esse deducendone l' obbliquità: tuttavia su questo semplice e solo argomento non sarò mai per toccare ad un elemento sì essenziale, e basato su tante osservazioni. Un maggior numero di solstizj osservati in più luoghi con molta diligenza, e ben discussi, potrà in fine determinare con sufficiente sicurezza la differenza di rifrazione cagionata dalla maggiore rifrangibilità della luce Solare. Il medio dei risultati sopra riferiti è di 6″, che ridotto all' orizzonte darebbe per differenza massima 2″ circa. Ma per ora ci basti sapere, che non possiamo valerci che delle sole osservazioni estive per istabilire l' obbliquità, sulle quali la diversa rifrangibilità non può indurre, che un picciolissimo errore.

OP-

OPPOSIZIONI DI GIOVE

OSSERVATE

Da Vincenzo Chiminello

Ricevute il dì 19 *Febbrajo* 1805.

I

		Appulsi al Murale	Differ. di Declinazione dal lembo superiore
1790 14 Feb.	di α del Cancro.	10h 52′ 6″, 2 t. v.	1° 15′ 7″, 8 Bor.
	del lembo di Giove.	12 0 37, 2	
15	di α del Cancro.	10 48 16, 3	17 51, 8
	del lembo di Giove.	11 56 14, 6	
16	di α del Cancro.	10 44 24, 6	20 33, 8
	del lembo di Giove.	11 51 52, 5	

A. R. med. di α nel Cat. la Caille 131° 44′ 58″, 8 A. R. App. 131° 45′ 28″, 21
Declinazione media 12 39 45, 1 Decl. App. 12 39 31, 58
e quindi ai 14 Feb. Lon. geoc. di Giove 4° 26° 16′ 36″, 4. Lat. geoc. 1° 12′ 15″, 8 Bor.
ai 15 4 26 8 4, 9 1 12 5, 9

movim. retr. 8 31, 5. Diff. di Decl. 9″, 9

14 Long. vera del Sole nell'istante dell'os. per le nove Tav. la Lande 10° 26° 33′ 41″, 1
Long. di Giove + nut. 10″, 04, e — l'aber. 11″, 00 4 26 16 15, 36

Distanza dalla opposizione già passata 17′ 25″, 74

Movimento del Sole dall' osser. dei 14 a quella dei 15 1° 0′ 22″, 0
Movimento retrogrado di Giove 8 31, 50

Movimento composto 1 8 53, 50

Tempo corrispondente alla distanza dalla opposizione 6h 3′ 11″, 9
onde l'istante dell'opposizione nel giorno 14 5h 57′ 25″, 8
nel quale istante la Long. vera del Sole per dette Tav. 10° 26° 18′ 24″, 7
o sia long. geoc., ed elioc. di Giove 4 26 18 24, 7
e la sua osservata latitudine geoc. 1 12 18, 0 B.
La longitudine di Giove per dette Tavole 4 26 17 40, 5
La latitudine geocentrica 1 11 40, 0
L' errore dunque delle Tavole in longitudine —44″, 2 in latit. — 38, 0.

II.

II.

	Appulsi al Murale.		*Diff. di Decl. dal lembo super.*
1791. 16 Marzo: di β della Verg.	11h 53′ 8″, 0 t. v.		
del lembo di Giove.	12 3 28, 1		0 9 12, 3 A.
17 di β	11 49 40, 0		
del lembo di Giove	11 59 31, 1		0 6 0, 2

A. R. media di β nel Cat. la Caille 174° 57′ 5″,1. Decl. 2° 56′ 43″, 9 B.

Abberrazione	+ 18, 4	— 7, 9
A. R. apparente	174 57 23, 5	Decl. app. 2° 56′ 36″, 0

Ommetto la nutazione quasi comune a β e Giove.

Or il semidiametro appar. di Giove essendo 21″, 8 risulta,

che l' A. R. di Giove osservato ai 16 fu 177° 33′ 12″, 2. La Decl. 2° 47′ 1″, 9 B.

ai 17 177 25 56, 0 2 50 14, 0

e le corrispondenti longit. geoc. 5′ 26° 38″52″, 0. Lat. geoc. 1° 34′ 48″, 3

5 26 30 55, 7 1 34 51, 2

onde il movimento retrog. di Giove 7 56, 3. Diretto 2, 9

16 Long. di Giove 5′ 26° 38′ 52″, 0. Long. del Sole allora per le noviss. Tav. de la Lande 11′ 26° 20′ 52″, 4

Nut. — 6, 7

Aberr. — 11, 0 Long. di Giove corretta 5′ 26° 38′ 34″,3

Long. di Giove cor. 5′ 26° 38′ 34″,3 Distanza dall' opp. 17 41, 9;

Mov. orar. di Giove in long. 19″,9 del Sole 2′ 29″,0, co'quali il composto 2′ 48″,9, e fatta la canonica analog. risulta che l'istante dell'opp. fu ai 16 Mar. a 18h 20′ 30″,6, t. v., nel qual istante le longitud. del Sole per le Tav. suddette 11′ 26° 36′ 29″, 3,

o sia la Long. el. di Giove osservata 5 26 36 29, 3,

e la Long. di Giove calcolata per le stesse 5 26 37 9, 3,

onde l' error delle Tavole in Longitudine + 40, 0;

la latitudine poi eliocentrica osservata concl. dalla geoc. 1° 17′ 34″, 7

calcolata 1 17 14, 6

e però l' error delle Tavole in latitudine — 20, 1

III.

	Appulsi al Murale		*Differ. di Decl. dal lembo super.*
1792. 16 Aprile: di α della Verg.	11h 31′ 52″, 2 t. v.		
del lembo di Giove	57 48, 0		1° 17′ 41″, 4 B.

20 di α 17 2, 1] 1 28 36, 0.
del lembo di Giove 41 2, 3]

Nei giorni precedenti alli 16, e 20 per il nuvolo, e le pioggie non fu possibile osservar Giove; nondimeno concludo la opposizione come segue:

dedotto, e supposto il semidiametro di Giove 21″, 0, e conclusa dal Cat. De la Caille l'A. R. e Declin. media di α, risulta della stessa l'app. Ascension Retta. 198° 34′34″, 4. Decl. 10° 4′ 19″,1

e di Giove 1.ª A. R. 205° 4′56″, 3. Decl. 8° 46′ 58″,7 A.

2.ª 204 35 59, 0 8 36 4 1

e le longitudini 6′ 26° 26′ 25″, 7. Latit. 1° 31′ 58″, 2 B.

6 25 56 11, 6 1 31 49, 3,

quindi il movim. orar. retr. di Giove risulta 18″, 95; del Sole tra il dì 15, e il 16 fu 2′ 26″, 5, onde il composto 2′ 45′, 45.

Ai 16 Long. di Giove 6′ 26° 26′ 25″, 7. Long. del Sole per le Tavole noviss. de la Lande 0′ 27° 36′ 20″, 8

Aberr. — 11, 0
Nut. — 3 Long. di Giove 6 26 26 1, 7

Long. corr. 6′ 26° 26′ 11″, 7 Dist. dell'opposiz. 1 10 9, 1

Il che tutto supposto, concludesi che la Opposizione accadè ai 15 di Aprile a 10ʰ 31′ 22″,4 t. v., o pure 10ʰ 31′ 2″, 6 t. m., nel quale istante la longitudine del Sole per le novissime Tavola de la Lande - - - - - - - - - - - 0′ 26° 34′ 16″,8,

cioè la long. geoc., ed elioc. di Giove osservata a sei segni distante - - - - 6 26 34 16, 8,

e per il suo proprio moto - - - - - - - 6 26 34 26, 4;

la long. di Giove calcolata secondo le dette Tavole - - - - - - - - - - 6 26 34 41, 3,

e quindi l'error delle Tavole in longitud. 1ª + 24, 5

2ª + 14, 9

La latitudine geocentrica osservata - - 1 32 0,57

calcolata - - 1 31 54,70

error delle Tavole in latitudine - - - — 5,87

IV.

IV.

		Appulsi al Murale		*Differ. di Decl. dal lembo super.*
1793 15 Mag.	dell' η della Libbra	11h 57' 37",6 t.v.	]	0° 29' 2",6 B
	del l. di Giove	12 8 15 ,0		
17	dell' η della Libbra	11 49 41 ,7	]	32 44 ,8
	del l. di Giove	11 59 19 ,7		
18	dell' η della Libbra	11 45 44 ,1	]	33 52 ,9
	del l. di Giove	11 54 50 ,5		
22	dell' η della Libbra	11 29 45 ,3	]	40 34 ,5
	del l. di Giove	11 36 47 ,5		

Per l' A. R. e Declinazione presa dal Catalogo de la Caille, e ridotta all' apparente proviene

17 Maggio Long. geoc. di Giove	7' 26° 58' 57".46	Latit. geoc.	1° 4' 42",75 B
18	7 26 51 22 ,79		1 4 5 ,71
movimento retrogrado	7 34 ,67		37 ,04

Aberr. — 11,00 Long. di Giove dei 17 corretta diviene 7' 26° 58' 50",44
Nut. + 3,98 Long. del Sole in quell' istante per le
Diff. — 7,02 noviss. Tavole de la Lande . . . . . 1 27 23 2 ,70,
onde la distanza dall' opposizione già passata 24 12 ,30.

Il mov. orar. di Giove osservat. 19",01, del Sole per le Tav. 2'24",2 composto 2' 43",21, e quindi alla distanza 24' 12",30 corrispondendo 8h 53' 56",2 si conclude, che la opposizione di Giove fu ai 17 maggio a 3h 1' 27", 5 t.m. nel qual istante la long. del Sole per dette Tavole fu 1' 27° 1' 39", 3,
cioè la long. geoc., ed elioc. di Giove osservata . . 7 27 1 39, 3,
e per il suo proprio moto 7 27 1 39, 6;
la long. poi di Giove calcolata per le stesse Tavole . 7 27 1 57, 3
la latit. geoc. per la osservazione 1 4 56, 7,
e la corrispondente latitudine elioc. 0 52 44,54
la latitudine elioc. calcolata 0 52 3,60
Sicchè l' error delle Tavole in longitudine si è . . + 17,30
in latitudine . . . . . — 40,94

V.

V.

		Appulsi al Murale				*Differ. di Decl. dal lembo super.*
1794.	19 Giugno	del l. di Giove	12^h	0′ 16″,5	t. v.	2° 5′ 25″,3 A.
		di μ del Sagittario	11	7 0,4		
	20	del l. di Giove	11	55 35,7		2 5 24,0
		di μ del Sagittario	12	2 51,1		
	21	del l. di Giove	11	50 53,2		2 5 24,6
		di μ del Sagittario	11	58 41,4		
	23	del l. di Giove	11	41 43,4		2 5 23,9
		di μ del Sagittario	11	50 38,4		

Per l' A. R. e Declinazione di μ del Sagittario presa dal Catalogo de la Caille ridotta all' apparente risulta di Giove

ai 19 Long. Geoc. 2′ 28° 47′ 46″,9 . Latit. 0 15 53.6 B.
ai 20 2 28 40 31,9 0 15 50.4
movimento retr. 7 15,0 3,2 ;

la long. poi del 19 corr. dall' aberr. — 11″,0 , e Nut. + 10″,8

risulta . . . . . 8′ 28° 47′ 46″,7
long. del Sole per le Tav. noviss. de la Lande in quell'istante 2 28 43 31,5
Distanza dall' opposizione 6 0 4 15,2;
movim. orario del Sole 2′ 23″, os. di Giove retr. 18″,2, composto 2′41″,2;
tempo corrispondente alla distanza dalla opposizione 1^h 34′ 59″,3,
tempo della osservazione dei 19 . . . . . 12 0 16,5
e però l' istante della opposizione . . . . . 13 35 15,8 t. v.,
nel quale la long. os. di Giove per il suo moto . 8′28°47′17″,9 . lat. geo. os. 0°15′53″,4
la long. calc. per le Tav. De Lambre . 8 28 48 13 .7. lat. calcol. 0 16 9,0
error delle Tavole in longitudine + 55,8 , in latit. + 15,6

VI.

		Appulsi al Murale				*Differ. di Decl. dal lembo super.*
1795.	24 Luglio	di π del Sagittario	10	41 8,4	t. v.	1 4 14,9 B.
		del l. di Giove	12	3 12,6		
	25	di π del Sagittario	10	37 11,6		1 2 16,7
		del l. di Giove	11	58 43,0		
	26	di π del Sagittario	10	33 16 8		1 0 31,5
		del l. di Giove	11	54 15,5		
	28	di π del Sagittario	10	25 25,5		0 56 36,6 A. R.
		del l. di Giove	11	45 20,5		

A. R. di π Catal. Vollastons, med. 284° 24′ 5″,2 . Decl. 21° 19′ 59″,5
Aberr. + 20,1 — 2 ,2
Nut. — 16,0 — 2 ,9
Asc. R. apparente 284 24 9,3 . Decl. app. 21 19 54,4
Ora il semidiametro di Giove trovandosi 23″,55 ,
l' A. R. ai 25 ne risulta 304° 50′ 44″,65 . La Decl. 20° 18′ 1″,25 A .
ai 26 . 304 42 32 ,85 . 20 19 46 .45
le corrispondenti long. app. 10ˢ 2° 24′ 22″,5 Latit. 0° 40′ 27″, 6
10 2 16 28 ,9 0 40 25 , 3
il movimento retrogr. 7 53 ,6 2 , 3
e quindi la long. dei 25 colla Nut. +14″,7, ed aberr. −11, o diviene 10ˢ 2° 24′ 26″,2,
la long. del Sole in quell' istante per le noviss. Tav. de la Lande 4 2 50 57 ,8
e la distanza dalla opposizione . . . . . 26 31 ,6;
Ciò posto, il movimento orario retrog. di Giove essendo 19′ ,8′, quello del Sole
2′ 23″,5, e il composto 2′ 43″,3, alla distanza della opposizione corrispondono 9ʰ 44′ 38″,2, e però l'opposizione ai 25 Luglio fu a 2ʰ 14′ 4″,8 t. v.,
nel qual istante la long. di Giove ai segni dal Sole osservata fu 10ˢ 2° 27′ 39″,3
La longit. calcolata per le suddette Tavole . . . . . 10 2 27 50 ,4
La corrispondente latit. geoc. osservata . . . . . 0 40 28 ,5 A.
calcolata . . . . . 0 40 20 ,4;
quindi l' error delle Tavole in longitudine . . . . . + 11″, 1
in latitudine . . . . . — 8 , 1.

SCHIARIMENTI

INTORNO A' PRINCIPJ D' ANTEPORSI NELL' APPLICAZIONE DE' COMUNEMENTE NOTI ALLA SOLUZIONE DE' PROBLEMI MECCANICI.

Di Paolo Delanges

Ricevuti il dì 4 Maggio 1805.

§. I.

Trattando io de' *Principj di Statica per i tetti, per i ponti e per le volte* nel Tomo XI degli Atti della nostra Società, feci conoscere principalmente, che per conseguire l' esatta soluzione de' problemi statici elementari risguardanti gli accennati soggetti, mediante i noti principj della composizione e della risoluzione delle forze, e delle minime azioni, o velocità virtuali, forz' è primieramente *di non ammettere nessuna attività ne' punti o sostegni d' appoggio, non essendo essi atti che a resistere alle forze perpendicolari a' piani in cui consistono;* ed in secondo luogo *di rilevare la linea che descriverebbe il centro di gravità d' una verga pesante; o le linee che descriverebbero i centri di gravità di più verghe combinate insieme in data posizione, se concesso fosse ad esse un libero movimento:* onde non solo ottenere l'esatta loro soluzione, ma eziandio scoprire la naturale e completa economia o distribuzione di tutte le forze componenti il proposto sistema.

§. II.

La presente soluzione che potrebbe proporsi per un caso del problema elementare da me discusso nella citata mia Memoria mi eccitò alla compilazione di questa.

Sia

Sia AB (*Fig. I. Tav. I.*) *una verga inflessibile e senza gravità, nell' estremità* A *siavi attaccato un corpo pesante raccolto nel punto* A.

Se la verga vien posta fra due piani DV, DR *uno orizzontale e l'altro verticale colla inclinazione* ABD = φ; *sarà la spinta orizzontale nel punto* B = P. cot.φ. *Quindi può aggiungersi. Ora secondo Delanges questa sarebbe* = o (*Tom. cit. pag.* 194. *coroll. I.*): *dunque la sua dimostrazione è erronea.*

Ora io passerò primieramente a dimostrare le assurdità della proposta soluzione, e poscia dimostrerò, come, nel contemplato caso particolare, il risultato dedotto dalla formola generale appoggiata alla mia teoria non è altrimenti erroneo; ma anzi conforme a' principj elementari della geometria.

§. III.

Essendo, posto il raggio = 1, sen. φ : cos. φ = 1 : cot. φ, sarà cot. $\varphi = \frac{\cos.\varphi}{\text{sen.}\varphi}$: dunque la spinta orizzontale, secondo la riferita soluzione, sarà presentata egualmente dalla formola P. $\frac{\cos.\varphi}{\text{sen.}\varphi}$ . . . . . (Y); vale a dire che denotando AF (Fig. II. Tav. I.) il peso raccolto nel punto A, condotta l'orizzontale FC, e descritto il parallelogrammo ACFG, dovrebbe dividersi la forza AC in direzione della verga nella verticale CH e nella orizzontale AH eguale a CF, per avere in questa la ricercata spinta orizzontale all' estremità B espressa dalla formola (Y).

Se pertanto s' intendesse che l' esposta soluzione dovesse valere egualmente se attaccato fosse il *corpo pesante* in qualsivoglia altro punto C della verga, si avrebbe allora proposto una soluzione più imperfetta di tutte le soluzioni pel passato conosciute; avvegnachè, come io dimostro (Tom. cit. pag. 188.) comprenderebbe essa insieme i due difetti a cui quelle soggiacciono, cioè quello di dare il valore della ricercata spinta senza veruna relazione alla posizione del punto, a cui è attaccato il *corpo pesante* all' immaginata *verga inflessibile* e *senza gravità*, e di dar-

lo

lo infinito nella posizione orizzontale. Che se in fine si ammettesse, che negli altri punti, eccettuato quello della sua estremità A, l' azione del *corpo pesante* dipender dovesse dalla ragione de' segamenti BC, CA, allora niente di nuovo si avrebbe scoperto, e non si avrebbe che ripetuta l' antica soluzione di Couplet, di cui (pag. cit.) io ne rappresento il generale risultato nella formola (A), e faccio osservare che conduce essa pure al secondo sopraccennato assurdo.

§. IV.

Ma quì può rispondersi I.° Che anche nella mia soluzione *supposto il corpo nella metà della lunghezza della verga, si ottiene la spinta orizzontale* = p. sen. ϕ. cos. ϕ, *che non contiene più nè* a *nè* b. II.° Che *intorno al paradosso risultante* dall' antica formola di Couplet *nel caso di* $\phi = 0$, *Gregorio Fontana dice* (*Soc. Ital. Tom. III. pag.* 530.) *che Lorgna ne ha dato* (*Saggi di Statica* §. *XI.*) *una ragione assai plausibile*. III.° *Che oltre all' inesattezza della mia formula nel caso che il corpo sia posto in* A *estremità superiore della verga inflessibile* AB, *sembra* IV.° *che la soluzione del* 1.° *problema* (Tom. cit. pag. 190 *e* 191) *a cui s' appoggia la stessa formola, sia radicalmente inesatta*. Pretendo io *che la forza* Cm = BM (Fig. III. Tav. I.) esprima la spinta orizzontale che esercita la verga in B. *Ma siccome le forze non si trasportano arbitrariamente da un punto all' altro e da un piano all' altro come le linee, egli è evidente che la forza* Cm, *ancorchè trasportata altrove, non può esprimere che la spinta orizzontale del punto* C, *ossia* (*per parlare più esattamente*) *quella parte della spinta orizzontale di* C *che proviene dalla forza* Ch: *quindi la stessa* Cm = BM *non potrà mai rappresentare la totale spinta orizzontale del punto* B.

§. V.

Che la spinta orizzontale nella supposizione che il centro di gra-

gravità cada nella metà della verga dipenda solamente dal suo angolo d'inclinazione lo dimostro così. La verga AB (Fig. IV. Tav. I.) inclinata nel dato angolo ABD si prolunghi quanto piace in a', e condotta aa' parallela a BD, si meni ab parallela ad AB, e nelle verghe AB, a'B, ab cadano i loro centri di gravità C, c, c' nella metà della respettiva lunghezza. È manifesto che i triangoli ABD, aBd, abD sono simili tra di sè; ma dimostrai (Tom. cit. pag. 193.), che nel caso supposto, la determinazione della spinta orizzontale si ha dalla ragione de' lati de' triangoli predetti: dunque indifferente si è l' elemento della lunghezza della verga, nè deve dipendere la spinta all' estremità B che dall' angolo d'inclinazione ABD.

§. VI.

Per convenire che nulla debba essere la spinta orizzontale nelle due posizioni della verga verticale ed orizzontale, e non solamente nulla nella prima ed infinita nella seconda, è duopo distinguere il problema d' investigare la spinta all'estremità B d'un trave AB (Fig. V. e VI. Tav. I.) contro un ostacolo O, ovvero un pilastro inerte BC, da quello di ricercare la forza BI d' applicarsi all' estremità B (Fig. VII. Tav. I.) per tenere fronteggiato il trave AB contro il muro AD nel dato angolo d' inclinazione ABD. Ognun vede che nel primo problema, sì, accostandosi l'ostacolo verso il muro AD, che allontanandosi da esso, finchè il trave AB si riduca verticale in aD, od orizzontale in $a'b'$, termina esso di spignere in tali due posizioni orizzontalmente in amendue le sue estremità, e inutile rimane, come la presenza del muro, così quella dell' ostacolo, venendo nella circostanza della figura V, nel primo e secondo caso sostenuto l' intero peso del trave dal piano orizzontale, ed in quella rappresentata dalla figura VI verrebbe sostenuto dal pilastro BC ridotto contiguo al muro AD, e capovoglierebbesi ridotto nella distanza orizzontale Ba eguale alla lunghezza dello stesso trave. Nel secondo problema poi, in cui la direzione e la quantità della forza BI (Fig. VII. Tav. I.) si

determina pel noto principio della composizione e della risoluzione delle forze, col condurre l' orizzontale AF, e dal punto F, in cui è intersecata dalla verticale CF alzata dal centro di gravità C del trave la FBI, e costruendo il parallelogrammo FGCH, cognita soluzione di Couplet, e che dà un risultato conforme a quello delle soluzioni proposte da Lorgna, Fontana, ec. (Tom. cit. pag. 188.); i primi elementi della meccanica bastano per comprendere che infinita deve essere la forza B*i* per rattenere il trave nella posizione orizzontale BD, come appunto lo dimostra la formola generale delle anzidette soluzioni. Ma è verità di fatto che col secondo problema intendevasi di sciogliere il primo, ch' è quello di cui abbisognava la meccanica: dunque resta esattamente dimostrato che la mia teoria non porta a risultato assurdo, ma a risultato vero e conveniente alla naturale condizione del problema, facendo conoscere che nulla egualmente si è la spinta della vergà nelle due posizioni verticale ed orizzontale.

§. VII.

Per giudicare geometrico e non *inesatto* il risultamento somministrato dalla mia formola *nel caso che il corpo sia concentrato in* A (Fig. VIII. Tav. I.) *estremità superiore della verga inflessibile* AB, bisogna riflettere, che nell' astratta fatta supposizione, la verga AB è precisamente una retta linea matematica, e che perciò il punto A è comune sì ad essa verga, che alla retta AD rappresentante il piano verticale a cui si suppone appoggiata, e quindi manifestamente apparisce che nell' astratto immaginato caso la forza AS equivalente al peso P, supposto concentrato in A, cade esattamente sulla stessa verticale AD, e che perciò essendo essa sostenuta intieramente sul punto D dal piano orizzontale BD, non può esercitare veruna spinta orizzontale all' altra estremità inferiore B della verga AB. Non dovrà in conseguenza riguardarsi come paradosso o come inesatto il risultato a cui conduce la mia formola generale applicata a questo caso particolare, ma consono anzi all' essenza sua astratta, cui altronde non può aver

aver luogo in natura giammai, ideandosi comunque deforme la verga di figura e di densità.

§. VIII.

Che finalmente sia radicalmente esatta e non *radicalmente inesatta la soluzione del problema* I. (Tom. cit. pag. 190 e 191), immaginandosi che non esprima la forza C*m* (Fig. III. Tav. 1), che *quella parte della spinta orizzontale di* C *che proviene dalla forza* Ch; e che *quindi la stessa* Cm = BM *non potrà mai rappresentare la totale spinta orizzontale del punto* B, basta considerare, che risoluta l' altra forza C*n* nell' orizzontale C*r*, e nella verticale *nr*; venendo la prima sostenuta orizzontalmente dal muro in A, non rimane che la seconda da comporsi con la C*h* con la costruzione del parallelogrammo C*hzt*, onde dalla composta C*z* ottenere *la totale spinta* orizzontale del punto B: ma essendo la verticale *hz* per diritto alla verticale *hm*, cioè *mhz* una linea retta, come non può dubitarsi di ciò, così egualmente non deesi dubitare, che C*m* non sia l' intiera spinta orizzontale nel punto B.

§. IX.

Per farsi poi un' idea chiara sulla convenienza della distribuzione delle forze nella mia soluzione, e dimostrare di non aver io abusato di trasportare le forze *arbitrariamente da un punto all' altro, e da un piano all' altro come le linee*; quantunque, se avessi errato io in ciò, avrei errato, e con chi volesse sostenere questa opinione, e con i matematici di tutti i tempi; si consideri I.° che gli sforzi che esercita la verga pesante AB in istato di equilibrio (Fig. III. Tav. I.), di cui il suo centro di gravità sia C, sono quegli stessi che eserciterebbe nell'astratta supposizione che la verga fosse priva di gravità, ed a cui fosse attaccato un peso nel punto C, rappresentato dalla verticale CG eguale a quello della verga pesante; II.° che l'azione del peso *o* della forza CG dee distribuirsi su i punti d' appoggio A e B; e III.° che in

A non

A non può essere sostenuta dalla reazione del muro che una forza orizzontale, ed in B dalla reazione del piano orizzontale una forza verticale. Posti tali principj non può non ammettersi, che risoluta, secondo la mia teoria, la forza CG nelle due C*n*, C*h*, e la C*n* nella orizzontale C*r* diretta contro il muro AD, e nella verticale C*t* contro il piano orizzontale; e la C*h* nell' orizzontale C*m* tendente ad allontanare la verga dal piano verticale, e nella verticale C*o* diretta contro il piano orizzontale, non può non ammettersi, dico, che nello stato di equilibrio della verga, la forza orizzontale C*r* sia quella che sostiene il muro verticale in A, che le verticali C*t*, C*o* insieme prese eguali al peso CG, vengano sostenute verticalmente dal piano orizzontale in B, e che l' orizzontale forza C*m* debba sostenersi orizzontalmente in B, cioè che essa sia l' intera spinta orizzontale che esercita alla sua estremità B. Per convincersi in altra guisa di ciò, egli è evidente, che supposto raccolto nel solo punto C il totale peso della verga, rappresentato dalla verticale CG, e tendendo esso a discendere nel primo istante per la tangente CH alla curva FCE, la forza C*h* ne rappresenta il suo momento alla discesa tutto diretto all'estremità B della verga: quindi non dee giudicarsi arbitraria la trasposizione della forza C*h* in BL, e molto meno che BM uguale a CL non rappresenti la totale spinta orizzontale, derivante dal totale peso della verga alla sua estremità B. Che se volessero risolversi le forze, C*h*, C*n*, che sarebbe lo stesso che risolvere alla bella prima la loro risultante CG in direzione orizzontale, ed in direzione della stessa verga, si caderebbe allora nel risultato delle summentovate soluzioni, che come ho dimostrato (§. VI.), non è conveniente al problema in discussione.

§. X.

Riguardo poi all' altra obbiezione che può farsi contro la mia teoria applicata alla soluzione del solito problema della verga, usando del principio delle velocità virtuali, cioè che non sia $p\left(\frac{-dxdy}{dx^2+dy^2}\right)$ (Tom. cit. pag. 203) la spinta orizzontale del punto

to B; ma che *per ottenere questa spinta bisogna ricercare le velocità virtuali di* S *e di* B, e discorrere così. *Ora mentre il peso* S (Fig. IX Tav. I.) *percorre lo spazio* RS = Cc, *l' estremità* B *della verga non percorre lo spazio* dx, *ma lo spazio* B*b*; *cosicchè la velocità virtuale di* S è Cc, e *quella di* B è B*b*, e chiamato X il peso equivalente alla spinta orizzontale in B, *si avrà l'equazione* X.B*b* = S.Cc = S$\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; ma essendo per la mia costruzione S$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = -pdy$, *ne risulterà la cercata spinta orizzontale del punto* B.

$$X = \frac{-pdy}{Bb}$$

Riguardo all'esposta obbjezione, dico, è da osservarsi primieramente che l' equazione X.B*b* = S.Cc è impropria al principio delle velocità virtuali, avvegnachè, supposto un minimo movimento nella verga, non reagiscono uno contro l'altro i pesi X, S; e intanto ha luogo in quanto, che pel detto principio applicato secondo la mia costruzione, *p*.C*n* è uguale sì ad X.B*b*, che ad S.Cc. Manifestamente poscia si conosce l' inutilità e l' inconcludenza dell' esposto lavoro, onde dimostrare insussistente l' analogia da me instituita per determinare nel quarto proporzionale a $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, dx, ed S, la spinta ricercata. Sembra per ultimo che dimostrato certo il risultato ottenuto dall' applicazione del principio della composizione e della risoluzione delle forze al problema, esatta pure e conveniente debba giudicarsi la mia applicazione allo stesso dell' altro principio delle velocità virtuali come conducente ad un identico risultamento; ho detto conveniente, mentre col determinare la spinta all' estremità B cercando il peso X, ossia la forza d'applicarsi alla sua estremità B per tenerla in equilibrio, non si risolve, come dimostrai (§. VI.), il proposto, ma un differente problema.

§. XI.

Rischiarata e confermata la mia teoria meccanica, mi si offre quì l' opportunità di farne l' applicazione al seguente problema, se non tanto utile, però non meno celebre di quello su cui s' è finora ragionato.

De-

Determinare l'angolo secondo cui dee inclinarsi la data verga AB (Fig. X. Tav. II.) *ad una parete verticale ed immobile* DC, *sicchè passando sopra un sostegno* O *dato di posizione, rimanga in equilibrio, sollecitata al moto da un peso* P *attaccato alla sua estremità* A.

Il P. Gregorio Fontana nel Tomo IX. degli Atti della nostra Società (pag. 626) dimostra che può sciogliersi tale problema co' noti e comuni principj della meccanica, non trovando necessario con Eulero di ricorrere al nuovo principio di Maupertuis, come può vedersi nel Tomo VI. degli Atti dell' Accademia di Berlino. Supponendo pertanto la verga AB priva di gravità e la superficie della parete perfettamente liscia, di maniera che non abbiasi a metter in computo nè il peso della verga, nè la resistenza dell' attrito, eccone la soluzione Fontana.

„ Si rappresenti colla retta BM perpendicolare al muro la „ reazione o resistenza che quivi incontra la verga, e si risolva „ anche la forza BM nelle due MN e BN, quella normale alla „ verga, questa in direzione di lei, quella tendente a rivolgerla „ intorno all' appoggio O, questa a farla correre sull' appoggio „ nella direzione BA. Guido dal sostegno O al muro la perpen- „ dicolare OE $= b$, e faccio l' angolo BOE $= \varphi$, tutta la verga „ BA $= a$, la sua parte OB $= x$, l' altra OA $= a - x$, il peso „ P $= p$, e la forza BM $= f$. Ora lo stato di equilibrio della verga „ esige queste due condizioni; 1.ª che non ci sia motò rettilineo „ di strisciamento sul sostegno O; 2.ª che non ci sia moto rota- „ torio intorno ad O; le quali condizioni importano 1.° l' egua- „ glianza delle forze opposte AG, BN; 2.° l' eguaglianza de' mo- „ menti delle forze GF, NM. Ma AG $= p$. sen. φ, BN $= f$. cos. φ, „ GF $= p$. cos. φ, NM $= f$. sen. φ. Si avranno dunque le due se- „ guenti equazioni dell' equilibrio I.ª p sen. $\varphi = f$ cos. φ. II.ª „ $p(a-x)$ cos. $\varphi = fx$ sen. φ; dalle quali, cacciando f, si avrà to- „ sto $p(a-x)$ cos. $\varphi = \frac{px \text{ sen.}^2\varphi}{\text{cos.}\varphi}$, e quindi $(a-x)$ cos.$^2\varphi =$

„ x sen.$^2\varphi$,

„ x sen.$^2\varphi$, e per ultimo $x = a$ cos.$^2\varphi = \frac{ab^2}{x^2}$, e conseguentemente „ $x = \sqrt[3]{abb}$. Il che ec.

§. XII.

Siccome però potrebbe sembrare a taluno, come è sembrato a me stesso, non convenire nella riferita soluzione la risoluzione della forza BM nelle due BN, NM, dacchè con essa vuolsi rappresentare la reazione orizzontale in B che dee esercitare il muro EC nel ricercato equilibrio della verga AB; così prima di procedere nella propostami discussione del problema, farò vedere essere nullameno tale quale risultò a Fontana, il risultamento che può ottenersi per la soluzione di esso da' comuni principj della meccanica. Divisa la forza AF (Fig. XI. Tav. II.) denotante il peso P nella perpendicolare FG e nella AG in direzione della verga, prolungata questa in Q, sicchè sia BQ eguale ad AG, e menata l' orizzontale SBM che concorra in S colla QS perpendicolare a BQ, si compiano il parallelogrammo SR, ed il rettangolo BM. Si chiami poscia $AB = a$, $OB = x$, $OA = a - x$, $OE = b$, ed $AF = p$; sarà $BE = \sqrt{(x^2 - b^2)}$, e per la somiglianza de' triangoli BOE, AGF, sarà la forza $AG = \frac{p}{x}\sqrt{(x^2 - b^2)}$, e la $GF = \frac{bp}{x}$. E poichè si è fatta BQ eguale alla forza AG, e la BQ si è risoluta nella BS perpendicolare al muro EC, e nella BR perpendicolare alla verga AB, equivalerà l' azione della forza AG contro il muro EC alla BS equilibrata dalla reazione dello stesso muro, ed alla forza BR tendente a far girare la verga intorno al punto O in direzione contraria a quella, a cui tende di farla girare la forza GF all' altra sua estremità A; e perciò pel richiesto equilibrio della verga dovrà essere $BR \cdot BO = GF \cdot AO$; ma per la somiglianza de' triangoli BQR, BOE, si ha $BR = \frac{p(x^2 - b^2)}{bx}$: dunque sarà

$$\frac{p(x^2 - b^2)x}{bx}$$

$$\frac{p(x^2-b^2)x}{bx} = \frac{bp}{x}(a-x)$$

e quindi $x = \sqrt[3]{abb}$, come risulta dalla sopraccitata soluzione dell' Eulero, o dalla rapportata del Fontana, quantunque non abbia io, come esso, creduto necessaria una forza di reazione in B, come BN eguale e contraria alla AG, per impedire *il moto rettilineo di strisciamento sul sostegno* O; il che veramente non può pretendersi dall'inerzia del muro, cui non resiste che in quanto è desso perpendicolarmente alla sua superficie premuto; nè saprei attribuire l' identità del risultato, che alla combinazione, dirò così, geometrica, cioè, che per la fatta costruzione ne segue, che la diagonale QB sia eguale al lato BN, e perciò che anche BN sia eguale ad AG. È inoltre osservabile che volendosi determinare OF, cioè porre OF $= x$, si perviene all'equazione completa del sesto grado

$$(b+x)^2[(b+x)^4 - 2a^2(b+x)^2 + a^4] - a^4x^2 = 0$$

ma sapendosi che è BO $= \sqrt[3]{ab^2}$, sarà AO $= a - \sqrt[3]{ab^2}$, e sta BO ad OE come AO ad OF: dunque OF $= x = \dfrac{ab - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{ab^2}}$

e però $x - \dfrac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}} + b = 0$, oppure, moltiplicando il numeratore ed il denominatore della frazione $\dfrac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}}$ per $\sqrt[3]{a^2b}$, $x - \sqrt[3]{a^2b} + b = 0$ dovrà essere una sua radice, come esattamente vi soddisfa. Ciò posto si trova, che in siffatta posizione di equilibrio, è la reazione del muro, cioè la forza BM $= \frac{P}{b}\sqrt{\left(b\sqrt[3]{a^2b} - b^2\right)}$.

§. XIII.

§. XIII.

Ma lasciando da parte il principio di Maupertuis, il quale in fine conduce allo stesso risultato, quantunque, come osserva Fontana, sia *un poco precario* (luogo cit.), l'esposta soluzione di tale problema coll' usata applicazione del principio della composizione e della risoluzione delle forze costringe a dover ammettere I.° che sotto qualunque angolo d' inclinazione la verga AB sia intenta e pronta a strisciare coll' estremità B lungo il muro soltanto verso il centro de' gravi; il che è contro il fatto che può da ogn' uno sperimentarsi; II.° che nelle inclinazioni in cui è in movimento la verga, l'estremità A sia disposta a girare circolarmente intorno al sostegno O, il che pure è contro il fatto, mentre strisciando essa allora coll' estremità B o verso E, o verso C percorrendo coll' estremità B la retta Bb, o Bb', coll' altra estremità A percorre gli archi Aa Aa' proprj d' una curva non circolare; e III.° non apparisce per ultimo, o non immediatamente risulta, sostenere nello stato di equilibrio l' appoggio O la pressione equivalente al solo peso P: dico al solo peso P, poichè egli è un principio elementare della Statica, che se vuolsi tenere in equilibrio il peso P (Fig. XII. Tav. II.) attaccato all' estremità A del vette AOB supposto privo di gravità, con altro peso R attaccato all' altra estremità B, il sostegno O soffre la pressione equivalente alla somma de' pesi P ed R; ma se il vette è tenuto in equilibrio mediante un ostacolo inerte in B, allora non sente che la pressione proveniente dal peso P, venendo estinta l' azione di esso all'estremità B dalla reazione del detto ostacolo. Così essendo, m'accingerò ora a risolvere questo illustre problema colla direzione della mia teoria.

§. XIV.

Prima d' ogni cosa pertanto è duopo scoprire l' equazione alla curva che descrive coll'estremità A la verga AB in movimento

(Fig. XIII. Tav. II.); che però si faccia l'ascissa OI $= x$, l'ordinata AI $= y$, e sarà OA $= \sqrt{(x^2+y^2)}$; posta poi la lunghezza della verga AB $= a$, e la distanza dell'appoggio O dal muro DC, cioè la perpendicolare OE $= b$, si avrà per la somiglianza de' triangoli AOI, BOE, BO $= \frac{b}{x}\sqrt{(x^2+y^2)}$, e quindi

$$\frac{b}{x}\sqrt{(x^2+y^2)}+\sqrt{(x^2+y^2)}=a$$

e sarà (A) l'equazione alla curva HAZaO

(A) . . . $x^4+2bx^3+(b^2+y^2-a^2)x^2+2by^2x+b^2y^2=0$

da cui si rileva, che la curva ha per asse OH $= a-b$, e che all'ascissa OG $= \sqrt[3]{a^2b}-b$ corrisponde la massima ordinata GZ, sicchè la tangente RS al punto Z è orizzontale, cioè parallela all'asse OH; e che le tangenti alla curva da Z in H s'incontrano coll'asse dalla parte GF, e le tangenti ai punti da Z in O dalla parte G*f*. Considerando pertanto che l'estremità A della verga AB, sollecitata al moto dal peso P, tende nel primo istante a muoversi nella direzione della tangente AF; è chiaro che nelle posizioni della verga comprese dall'arco ZAH tenderà coll'altra estremità B a strisciare lungo il muro da B in su verso D, e che nelle posizioni comprese dall'arco Za O, tenderà viceversa coll'estremità *b* a strisciare in giù da *b* vèrso C; e siccome non è atto il muro che di reagire contro una forza ad esso perpendicolare, così ne segue che in nessuna delle accennate posizioni potrà la verga restare in equilibrio. Disposta poi la verga nell'inclinazione *b*'OZ diretta all'estremità Z della massima ordinata GZ, tendendo in questa posizione a moversi l'estremità A nel primo istante per l'orizzontale ZS, l'altra estremità *b*' non avrà movimento strisciante lungo il muro, e però l'azione del peso P all'estremità Z potendo essere equilibrata dalla reazione perpendicolare del muro, in tale posizione unicamente si manterrà la verga in equilibrio, e la determinazione del suo angolo d'inclinazione dipenderà dal valore di OG $= \sqrt[3]{a^2b}-b$. Menate poi l'orizzontale *b*'M, e la verti-

ca-

cale OM, ed inoltre condotte la GS parallela alla verga b'OZ, e la verticale OR, che incontrino la tangente orizzontale RZS ne' punti S ed R, indicando l' ordinata ZG il peso p, sarà la forza orizzontale $ZS = p\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\right)$, ponendo $\sqrt[3]{a^2b} = c$, e rappresentando $b'M$ la reazione esercitata dal muro, si avrà $b'M = p\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\right) \times \frac{OR}{OM}$; ma siccome in questo caso è $p\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\right) \times \frac{OR}{OM} = p\left(\frac{OG}{OM}\right)$, sarà anche la reazione del muro $b'M = p\left(\frac{OG}{OM}\right) = \frac{p}{b}\sqrt{\left(b\sqrt[3]{a^2b} - b^2\right)}$, risultato identico a quello che si ottiene dalle riferite soluzioni (§. XII).

§. XV.

Scoperta la curva OZAH (Fig. XIV Tav. II), si vedrà ora come agevolmente si risolva col principio delle velocità virtuali il proposto problema. Si chiami BV la forza necessaria per impedire lo strisciamento lungo il muro dell' estremità B della verga AB a cui tende, parlando delle inclinazioni comprese dall' arco ZAH in virtù del peso P attaccato all' altra sua estremità A. Supposto un minimo movimento nella verga, sicchè l' estremità A abbia percorso l' archetto infinitesimo Aa della curva, e l' estremità B lo spazietto infinitesimo verticale Bb, e siasi trasferita la verga BOA in bOa; calata l' ordinata AI e l' infinitamente prossima ai, e tirata l' orizzontale ao, dovrà pel principio delle velocità virtuali essere $VB \cdot Bb = P \cdot Ao$, cioè $VB = P\left(\frac{Ao}{Bb}\right)$. Ora essendo l' ascissa $OI = x$, menata st parallela ad ao, sarà $Ii = st = ao = dx$; dall' equazione alla curva (§. XIV) si ha poi

$$AI = y = \frac{x}{b+x}\sqrt{\left(a^2 - (b+x)^2\right)}$$

sarà differenziando

$$Ao = -dy = dx\left(\frac{(b+x)^3 - a^2b}{(b+x)^2\sqrt{(a^2-(b+x)^2)}}\right)$$

e quin-

e quindi essendo OI : IA = $st : ta = os$, si avrà

$$os = \frac{dx}{b+x}\sqrt{\left(a^2-(b+x)^2\right)}$$

e però

$$As = dx\left(\frac{(l+x)^3-a^2b}{(l+x)^2\sqrt{\left(a^2-(l+x)^2\right)}}\right)+\frac{dx}{b+x}\sqrt{\left(a^2-(b+x)^2\right)}$$

ed essendo inoltre AO : OB = OI : OE = $As : Bb$, sarà

$$Bb = \frac{b\,dx}{x}\left(\frac{(l+x)^3-a^2b}{(b+x)^2\sqrt{\left(a^2-(l+x)^2\right)}}+\frac{\sqrt{\left(a^2-(l+x)^2\right)}}{b+x}\right)$$

e perciò la forza verticale

$$VB = P\left(\frac{Ao}{Bb}\right) = \frac{P\left(x(b+x)^3-a^2bx\right)}{b\left((b+x)^3-a^2b\right)+b(b+x)\left(a^2-(b+x)^2\right)}.$$

Siccome nulla dee diventare la forza verticale lungo il muro nell' inclinazione della verga in equilibrio, così eguagliando a zero la trovata formola, si avrà l' equazione del terzo grado

$$(x+b)^3-a^2b = 0$$

che ha due radici immaginarie, e la reale si è $x = \sqrt[3]{a^2b}-b$; dal che risulta, come s' è veduto superiormente, che la verga dee essere inclinata al punto Z della massima ordinata GZ per restare in equilibrio: così posto in luogo d' x il valore $\sqrt[3]{a^2b}-b$ dell' ascissa della massima ordinata, si scopre, che in tale inclinazione diventa nulla la forza verticale all' estremità B, convertendosi la trovata formola in $VB = \varphi\,\frac{o}{\left(a^2b\sqrt[3]{a^2b-a^2b^2}\right)} = 0$ e supponendosi la verga nella posizione orizzontale EOH, cosicchè sia $x = a-b$, si rileva come deve essere $VB = P\left(\frac{a-b}{b}\right)$.

§. XVI.

Non è difficile poi di rilevare la ragione della identità di risultati fra la riferita (§. XII) e la mia soluzione riguardo alla ri-

ricerca dell' inclinazione in cui può mantenersi la verga in equilibrio: imperocchè fatta la solita risoluzione della forza AF (Fig XV Tav. II) rappresentante il peso P, e della forza orizzontale BM occorrente all' equilibrio della verga AB, onde la forza BN sia uguale e contraria alla forza AG, ed il momento della BR uguale al momento della CF o Af intorno all'appoggio O; si conduca per O la verticale mO, e sarà per la somiglianza de' triangoli BRM, BmO, il momento di BR uguale al momento di BM, e per la somiglianza de' triangoli AOF, AfF, il momento della forza Af uguale al momento della forza AF: dunque sarà anche il momento della forza BM uguale al momento della forza AF come accade nella nostra soluzione (§. XIV). Per conoscere però chiaramente l'incertezza dell' uso del principio della risoluzione delle forze, senza il soccorso degli accennati principj (§. I), imprenderò la soluzione di tale problema generalmente, cioè. *Determinare in una data inclinazione della verga* AB (Fig. XVI Tav. II), *eccettuata quella dell' equilibrio, la spinta orizzontale e la spinta verticale che esercita all' estremità* B *contro il muro* DC.

§. XVII.

Si ponga che la verga AB sia quadrupla della distanza OE, e che sia inclinata in maniera che OF sia doppia di OE. Chiamata al solito OE $= b$, sarà OF $= 2b$, la verga AB $= 4b$, e sarà il segamento BO $= \frac{4}{3}b$, e l' altro AO $= \frac{8}{3}b$; e quindi AF $= \frac{2}{3}b\sqrt{7}$, e BE $= \frac{b}{3}\sqrt{7}$. Rappresentato da AF il peso P, si costruisca il rettangolo Gf, e fatta BN uguale ad AG, e tirata l'orizzontale BM si costruisca il rettangolo NR. Si troverà com' è noto, la forza AG $=$ BN $= p\,\frac{\sqrt{7}}{4}$; e la forza A$f = p\,.\,\frac{3}{4}$, e la forza BR $= p\,.\,\frac{7}{16}$; ma per l' equilibrio della verga la forza BR dovrebbe essere doppia della Af, cioè BR $= p\,.\,\frac{24}{16}$: dunque nella

la data inclinazione non può mantenersi in equilibrio, ed è costretta a strisciare coll'estremità B lungo il muro in su da B verso D. Suppongasi arrestato questo moto da una maggior grossezza superiormente al punto B della muraglia, come dimostra la figura, e si cerchino in tale circostanza la forza verticale, e la forza orizzontale esercitate dalla verga alla sua estremità B contro il muro. Seguendo il comune metodo di applicare i noti principj meccanici al problema, è manifesto, che per tenere in equilibrio la verga AB nella data inclinazione, è necessaria una forza B*m* risultante della BN eguale e contraria alla AG, e della B*r* parallela e doppia della A*f*; e siccome la forza BN è impiegata ad impedire alla verga di strisciare sull'appoggio O, dalla sola forza B*r* intenta ad impedirle il moto rotatorio, dovranno dedursi le forze ricercate, e perciò tirata l'orizzontale *r*C, essendo la forza $Br = p \cdot \frac{3}{2}$, per la somiglianza de' triangoli AOF, BC*r*, si troverà essere la forza verticale in B, cioè $BC = p \cdot \frac{18}{16}$, e l'orizzontale $Cr = p \cdot \frac{6\sqrt{7}}{16}$.

§. XVIII.

Si passi ora a risolvere il proposto problema dirigendone la soluzione co' nostri principj (§. I). Sia come antecedentemente la verga AB (Fig. XVII. Tav. III) quadrupla della distanza EO, e la sua inclinazione sia tale che l'ascissa OI sia doppia di OE; per il che essendo $OE = b$, sarà $OI = 2b$, $BO = \frac{4}{3}b$, $AO = \frac{8}{3}b$, $AI = \frac{2}{3}b\sqrt{7}$, e $BE = \frac{b}{3}\sqrt{7}$. E poichè l'ascissa OI è maggiore dell'ascissa OG della massima ordinata GZ, essendo $2b > \sqrt[3]{a^2 b} - b$, cioè per essere nell'assunto esempio $a = 4b$, $2b > 2b\sqrt[3]{2} - b$; così è manifesto che l'estremità A della verga nella data inclinazione si troverà nell'arco ZAH della curva

va che descriverebbe se non le fosse impedito, come supponiamo, il moto, e che però mentre tende coll' estremità A a discendere per l'arco AH, cioè nel primo istante per la tangente AF, coll'altra estremità B tende ad ascendere da B verso D. Posto ciò, sia indicato da AI il peso P, e condotta la tangente AF, si costruiscano il parallelogrammo A*x* I*f*, ed i rettangoli A*x*, A*f*. Delle due forze pertanto A*x*, A*f* nelle quali si è risoluta la AI, la sola A*f* è quella che viene reagita dal muro al punto B: imperocchè delle due forze AR A*u* in cui questa risolvesi, la prima orizzontale AR, stante la predetta tendenza della verga, spinge il muro perpendicolarmente alla sua superficie da B in *r*, e la seconda verticale A*u* lo spinge verticalmente da B in D, che sono le due uniche direzioni nel muro, conformato come si è supposto, per le quali spinto può equilibrare le forze contro di esso dirette con la sua reazione. Delle due forze poi AS, A*m* in cui s' è risoluta la forza A*x*, tendendo la prima orizzontale AS a distaccare l' estremità B della verga dal muro, diventa nullo il suo effetto ed insieme quello della verticale A*m* contro il muro medesimo. E poichè nello stato di equilibrio l' appoggio O dee sostenere la pressione dell' intero peso P, o dell' equivalente forza AI (§. XIII) così ne segue che mentre la forza AR spinge orizzontalmente il muro in B, tiene in equilibrio anche la forza AS, e che la forza A*u* che lo spinge verticalmente gravita, con la A*m* eguali insieme alla AI, sull' appoggio O. Per determinare poi le quantità della forza verticale e della orizzontale in B; dall' equazione alla curva (§. XIV) si ricavi la sottangente $FI = \frac{42}{11} b$, e sarà la tangente $AF = \frac{8 \cdot b}{3 \cdot 11} \sqrt{301}$: quindi per la somiglianza de' triangoli FOA, FI*f*, si avrà $Af = \frac{8 \cdot b}{3 \cdot 32} \sqrt{301}$; ed instituendo come AI ad A*f*, così *p* a forza A*f*; sarà la forza $Af = p \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{301}}{2 \cdot 32 \cdot \sqrt{7}}$, e finalmente per la somiglianza de' triangoli FAI, FA*u* si scopre la forza $Au = p \cdot \frac{11}{32}$, e

la

la forza *fu* ovvero $AR = p \cdot \frac{3 \cdot 21}{32 \cdot \sqrt{7}} = p \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{7}}{32}$: ma tali forze agiscono all' estremità A del vette BOA in cui OA è doppia di BO : dunque la forza di reazione verticale che esercita il muro nel punto B è $p \cdot \frac{11}{16}$, e la forza di reazione orizzontale $p \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{16}$: Surrogando nella formola generale esprimente la forza verticale esercitata dalla verga al punto B comunque inclinata, e derivante dalla soluzione ottenuta del problema col principio delle velocità virtuali (§. XV), surrogando, dico, $2b$ in luogo d'x, e $4b$ in vece di a per applicarla al caso particolare preso in considerazione, si trova come innanzi che la forza verticale in B è pure costantemente $p \cdot \frac{11}{16}$.

§. XIX.

Gioverà a confermare la verità dell' esposta soluzione nell' accennato caso, l' imprendere di determinare la forza orizzontale che spinge il muro in B essendo inclinata la verga AB (Fig. XVIII Tav. III) al punto A della massima ordinata AG, ed in cui la tangente SAR è orizzontale. Si sa che essendo $OE = b$, ed $AB = 4b$, sarà $OG = 2b\sqrt[3]{2} - b$, ovvero posto $\sqrt[3]{2} = \varphi$, $OG = 2b\varphi - b$, $BO = \frac{2b}{\varphi}$, $AO = \frac{4b\varphi - 2b}{\varphi}$, $BE = \frac{b}{\varphi}\sqrt{(4 - \varphi^2)}$, ed $AG = \frac{(2\varphi b - b)\sqrt{(4-\varphi^2)}}{\varphi}$. E poichè condotta GR parallela alla verga, cioè risoluta la forza AG nelle AO, AR, la forza AR, che corrisponde alla Af (Fig. XVI Tav. II), essendo orizzontale non può somministrare veruna forza verticale, così la sola forza AR dovrà essere reagita dal muro in B : e per essere la forza $AR = p\left(\frac{2\varphi^2 - \varphi}{(2\varphi - 1)\sqrt{(4-\varphi^2)}}\right)$, sarà il quarto proporzionale alle BO OA ed alla forza AR, cioè $p\left(\frac{2\varphi^2 - \varphi}{\sqrt{(4-\varphi^2)}}\right)$ la forza orizzontale, os-

sia

sia la reazione che esercita il muro nel punto B; valore, che egualmente in tale inclinazione della verga, si ottiene dall' espressione $p \cdot \frac{OG}{BE}$, di cui l' esattezza si è già dimostrata (§. XII). Conseguentemente la forza AO, che può risolversi nell' orizzontale AS eguale e contraria alla AR e nella verticale AG, non serve che a far conoscere che l' intera forza AG o il peso P è sostenuto dall' appoggio O.

§. XX.

Confrontando pertanto le forze o reazioni del muro all' estremità B della verga lunga ed inclinata, come si è supposto, $p \cdot \frac{18}{16}$, $p \cdot \frac{6\sqrt{7}}{16}$ (§. XVII) ottenute dall' applicazione al problema de' noti principj meccanici, colle forze o reazioni $p \cdot \frac{11}{16}$; $p \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{16}$ determinate colla nostra soluzione (§. XVIII), non sussiste più l' identità di risultato, come nel caso in cui la verga è inclinata sotto l' angolo di equilibrio (§. XVI); ma mentre è la forza verticale $p \cdot \frac{18}{16}$ maggiore della $p \cdot \frac{11}{16}$, l' orizzontale $p \cdot \frac{6\sqrt{7}}{16}$ è minore della $p \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{16}$. Conosciuta la ragione dell' identità di risultato nella suddetta inclinazione, resta presentemente per condurre a termine l' intrapresa analisi di questo problema, dimostrare donde dipenda la diversità di risultati nelle altre inclinazioni della verga medesima. Suppongasi che all'estremità B della verga AB (Fig. XIX. Tav. III) non esista il muro verticale; è indubitato, che in tale supposizione, fatto intorno AF esprimente il peso P, il rettangolo G*f* e posta BN eguale ad AG e B*r* parallela alla A*f* quarta proporzionale alle BO, OA, A*f*, e compiuto il rettangolo B*m*, nella diagonale B*m* si avrà la direzione e la quantità della forza necessaria all' equilibrio

della verga AB; poichè equivalendo alla B*m* le due BN, B*r* la prima BN essendo eguale e contraria alla AG, impedisce alla verga di strisciare sull' appoggio O, e la B*r* avendo alla A*f* la ragione reciproca delle distanze BO, OA, impedirà il moto rotatorio intorno all' appoggio medesimo: così risoluta la forza B*r* nella verticale BC e nell' orizzontale B*b*, dipenderà l'equilibrio della verga dalle tre forze BN, BC, B*b*; ma essendo appunto le forze BC, B*b* le determinate nella soluzione del problema (§. XVII. Fig. XVI. Tav. II.) della verga fronteggiata contro il muro verticale DC: dunque s' è supposto che in quella circostanza il muro potesse esercitare una forza BN eguale e contraria alla GA, il che non può attendersi dall' inerzia del muro, ma solamente da una forza attiva del valore e della direzione di B*m*. Non è dunque erronea quella soluzione se non in quanto non vale per la condizione che la verga sia inclinata ad un resistente muro verticale, e si è risoluto un problema diverso dal proposto, ed è in ciò che consiste la diversità de' surriferiti risultati. Nel problema dunque del muro, dall'intiera forza B*m* necessaria all'equilibrio della verga deggiono risultare le forze esercitate dalla stessa contro di esso nel punto B: di modo che prodotta B*m* in *d* e presa B*d* eguale a B*m*, compiendo il rettangolo B*d*, sarà BD (Fig. XVI. Tav. II.) la forza verticale che soffre il muro nel punto B, e B*b* l' orizzontale. Per determinare i valori di tali forze si conducano le orizzontali *r*C, *mz*, e la verticale *rn*; e sarà *mz* = B*b*, e B*z* = BD: essendo poscia BN = $b \cdot \frac{7}{6}$, e B*r* = $b \cdot \sqrt{7}$, si avrà B*m* = $\frac{b}{6}\sqrt{301}$, e la forza B*m* = $p \cdot \frac{\sqrt{7 \cdot 301}}{4 \cdot 7}$. Inoltre per la somiglianza de' triangoli BC*r*, AOF, si ricaverà BC = $b \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4}$, C*r* = $b \cdot \frac{7}{4}$, e per la somiglianza de' triangoli *rnm*, AOF, *rn* = $b \cdot \frac{7\sqrt{7}}{24}$, ed *mn* = $b \cdot \frac{7}{8}$; e perciò B*z* = $b \cdot \frac{11 \cdot \sqrt{7}}{24}$, ed *mz* = $b \cdot \frac{21}{8}$; e finalmente instituendo

B*m*

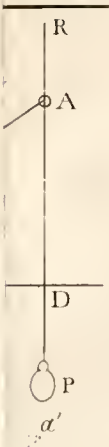


Fig. 2.

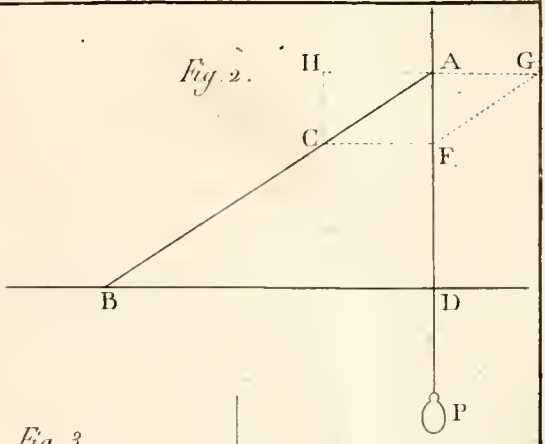


Fig. 3.

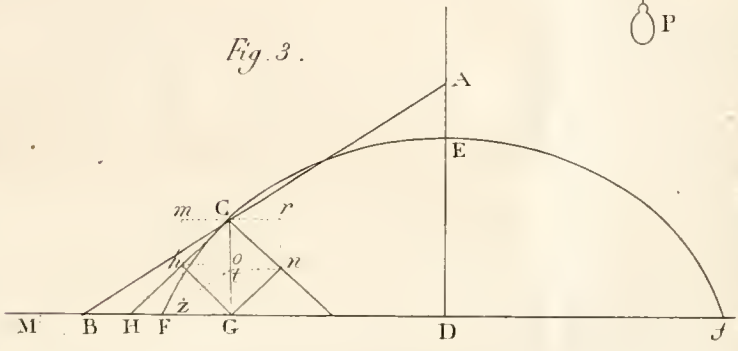
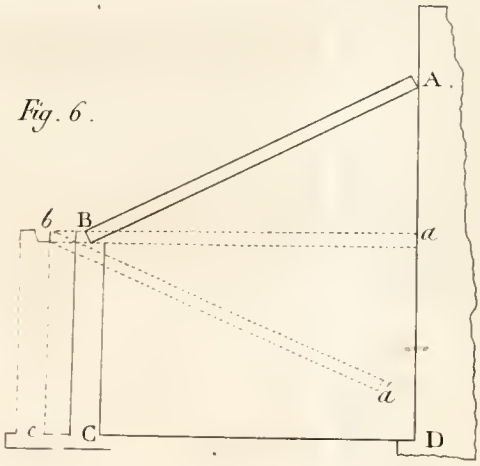


Fig. 6.



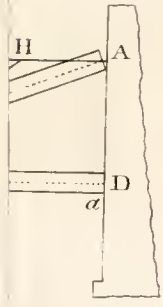


Fig. 9.

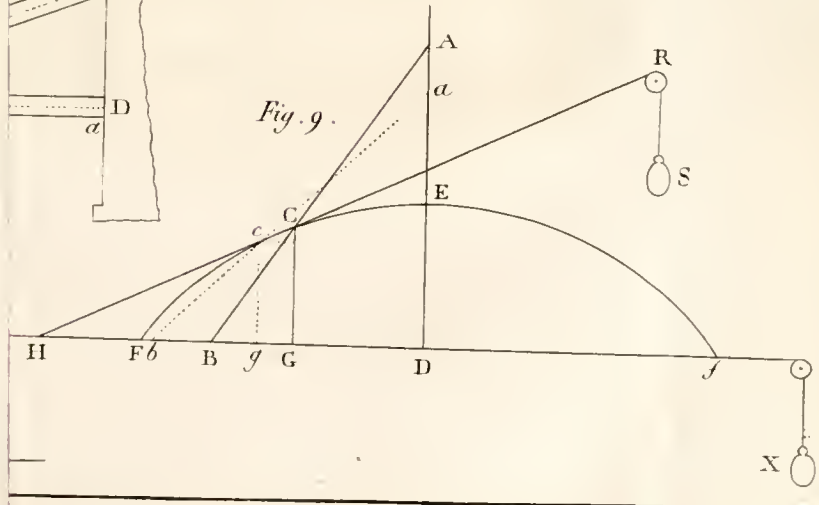


Fig. 1.

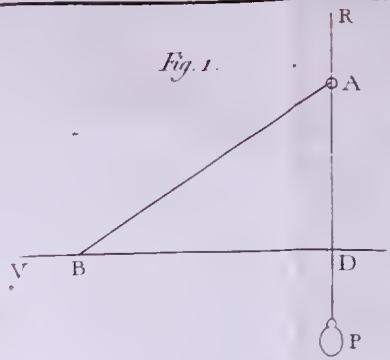


Fig. 2.

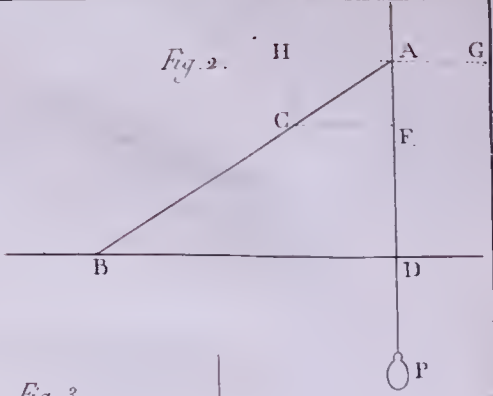


Fig 4.

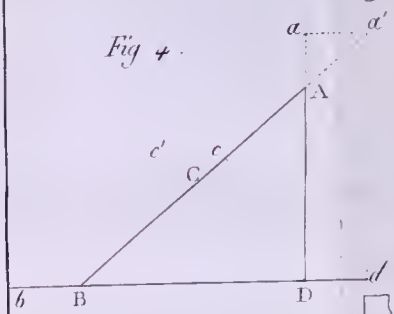


Fig. 3.

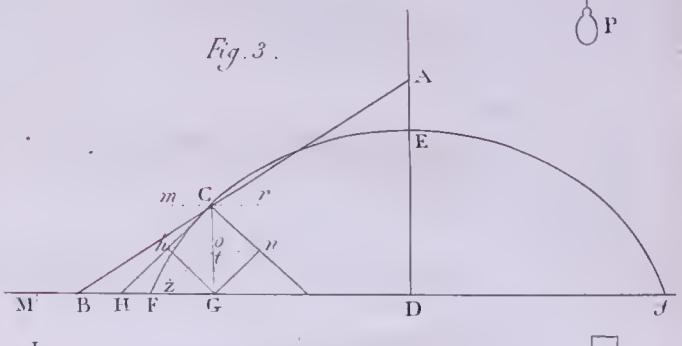


Fig. 5.

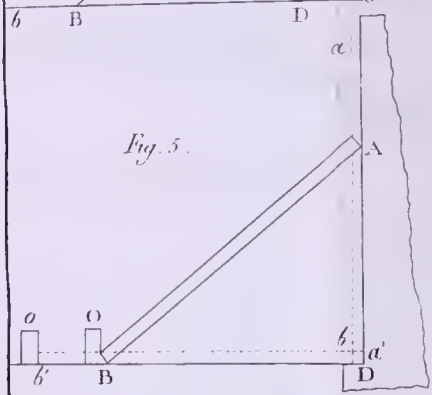


Fig. 6.

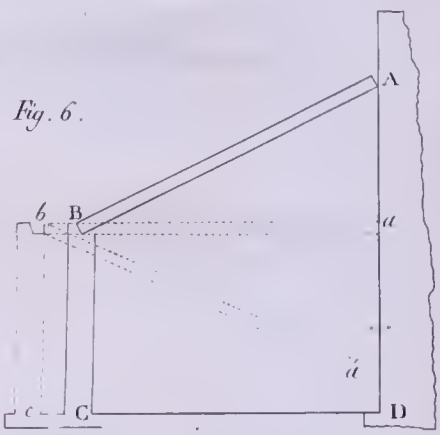


Fig. 7.

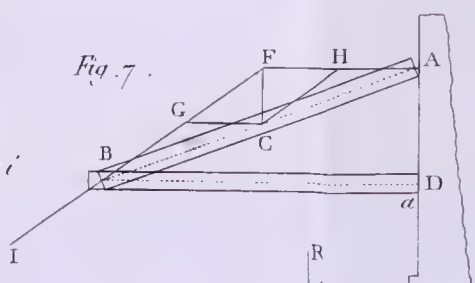


Fig. 9.

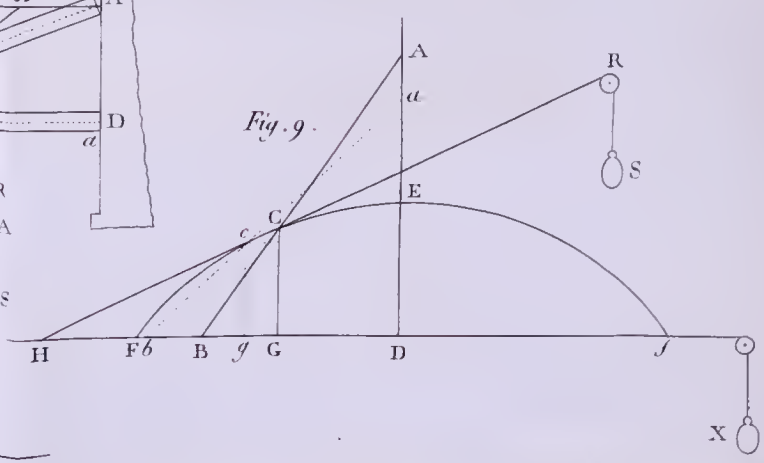
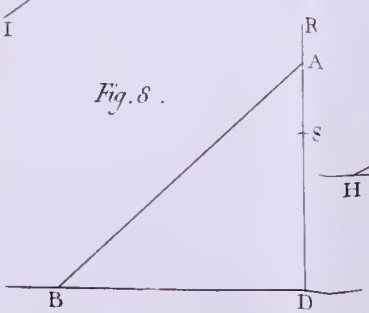
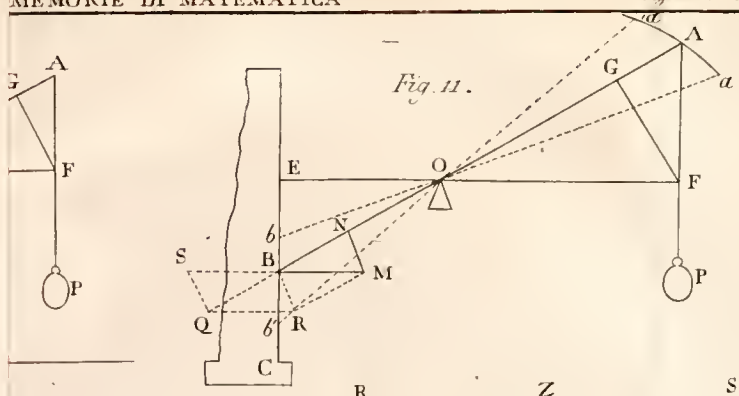
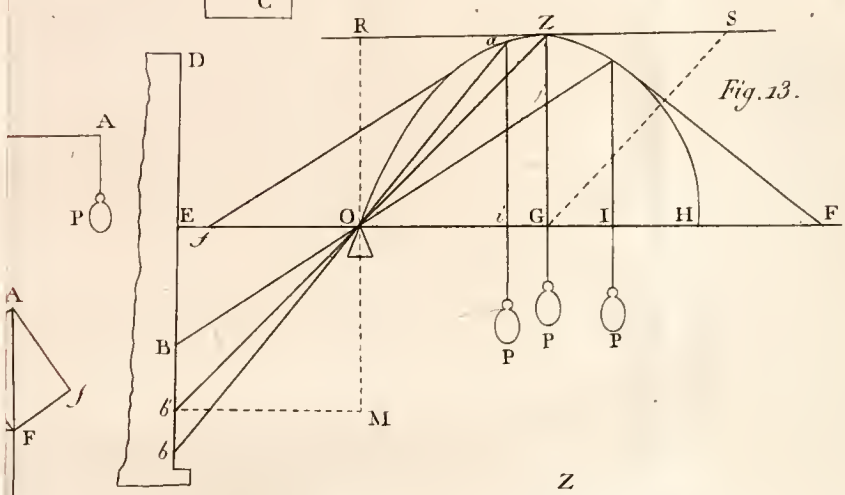


Fig. 8.




A
G
F
P
Fig. 11.
a
A
G
a
E
O
F
b
N
S
B
M
P
Q
b'
R
C


R
a
Z
S
D
Fig. 13.
A
P
E
O
i
G
I
H
F
f
B
P
P
P
b'
M
b

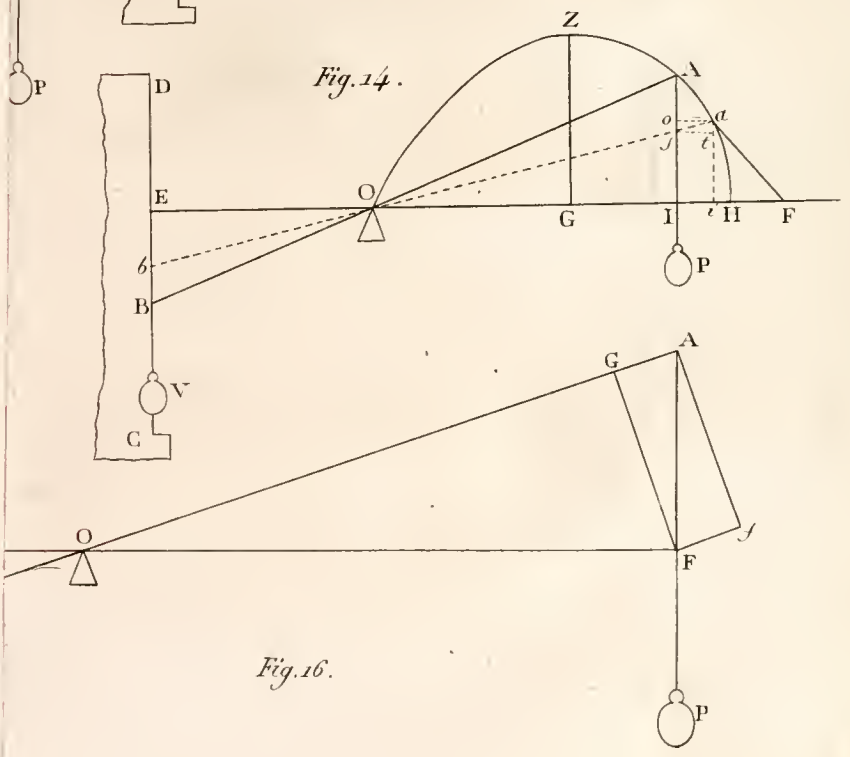

A
f
F
P
Z
Fig. 14.
D
A
o
a
f
i
E
O
G
I
i
H
F
b
B
P
V
C
G
A
O
f
F
P

Fig. 16.

Fig. 10.

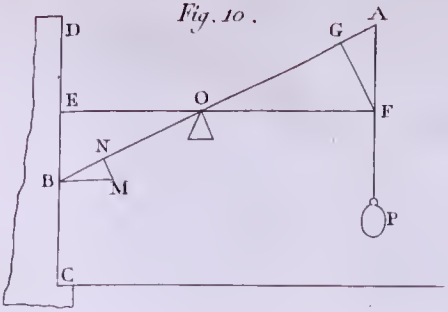


Fig. 11.

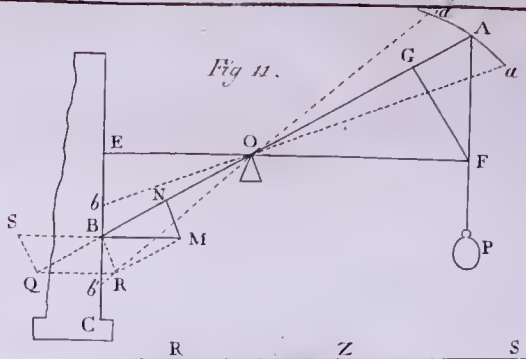


Fig. 12.

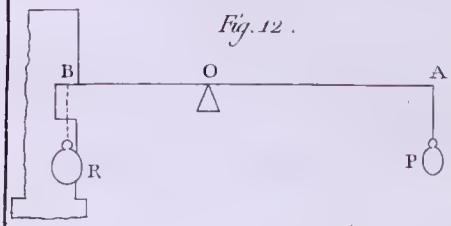


Fig. 13.

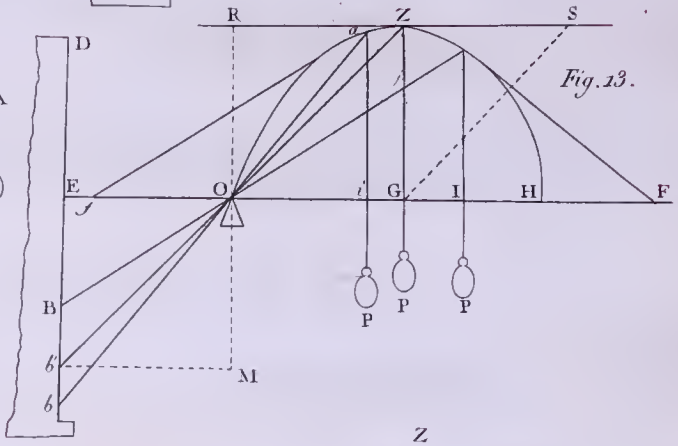


Fig. 15.

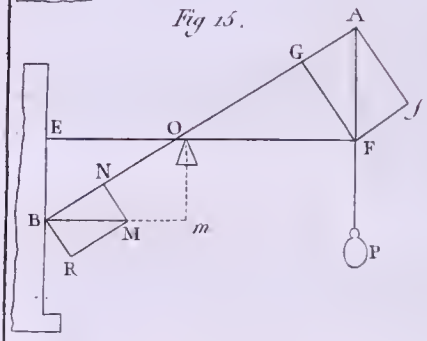
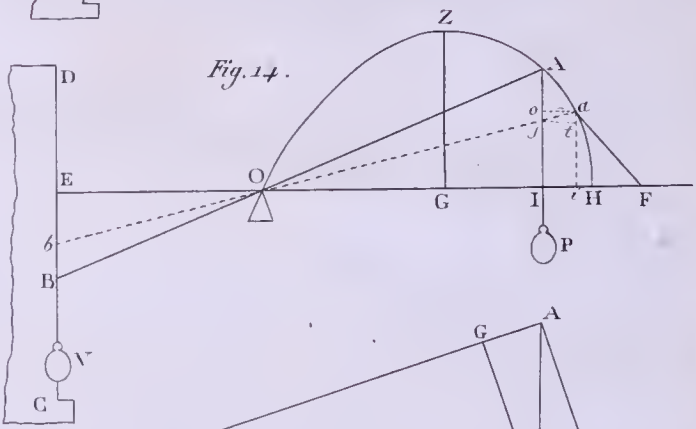


Fig. 14.



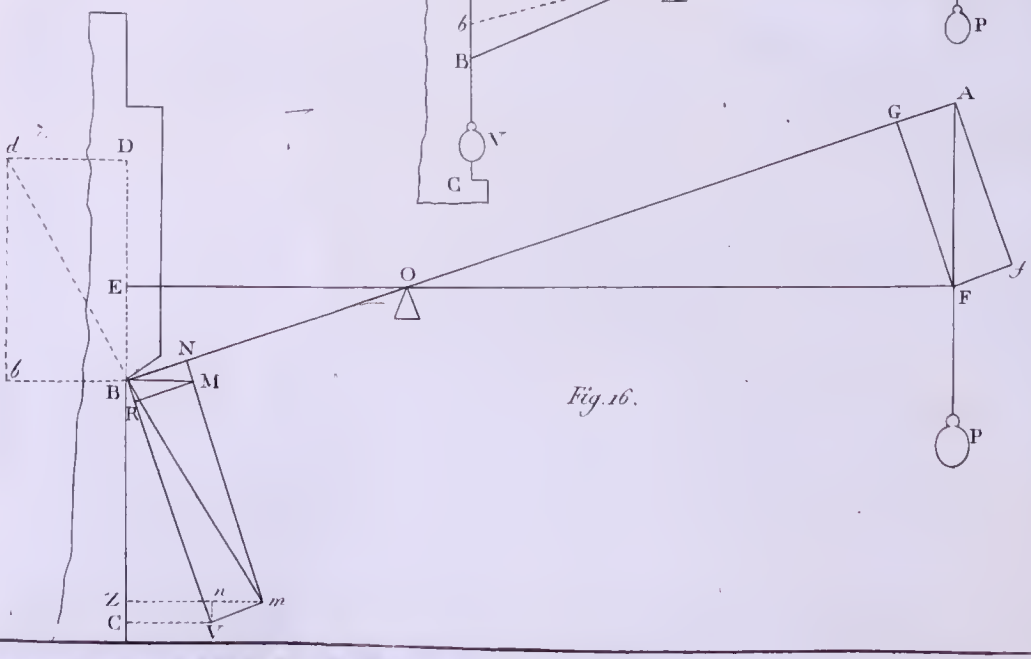


Fig. 16.

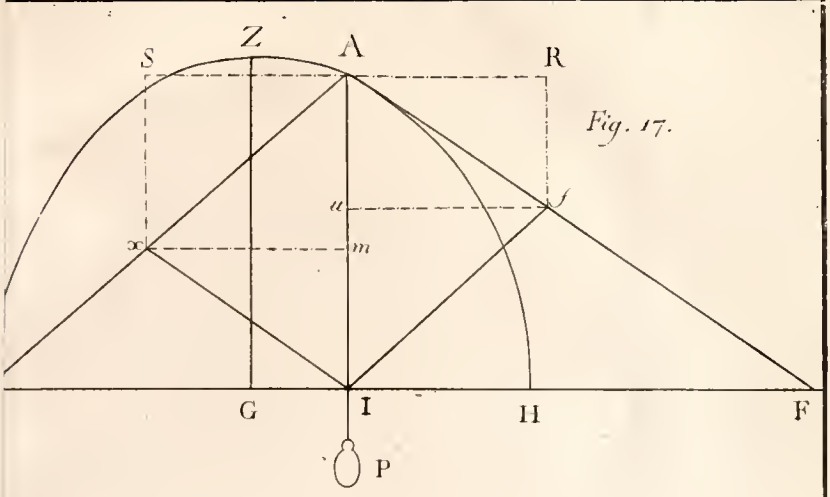


Fig. 17.

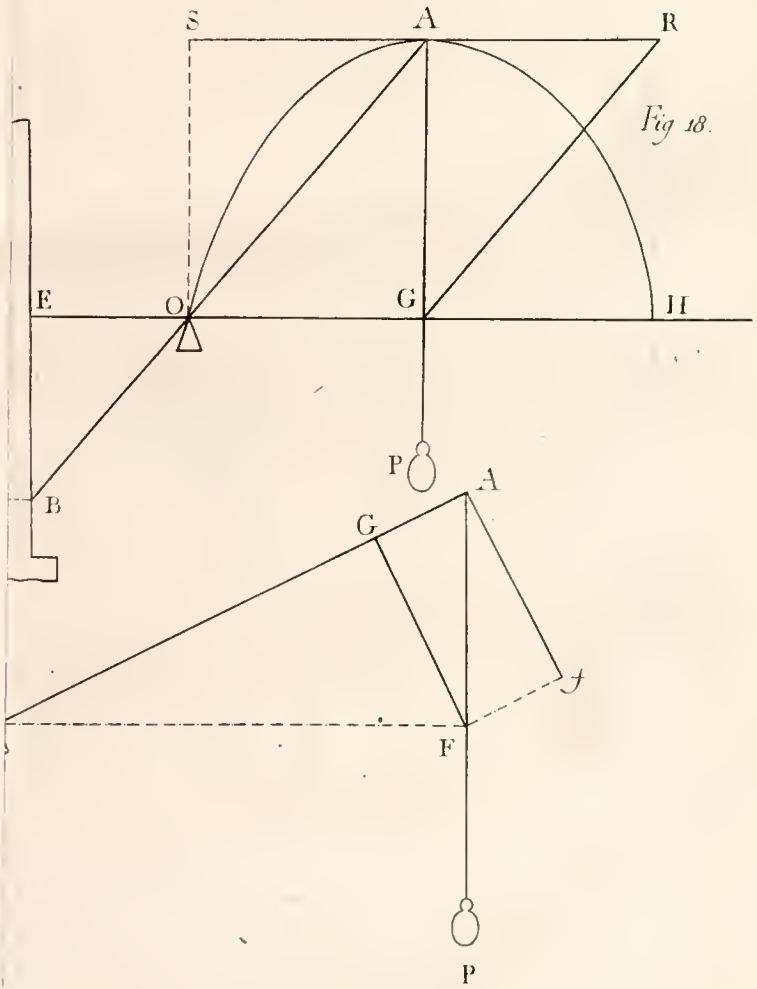


Fig 18.

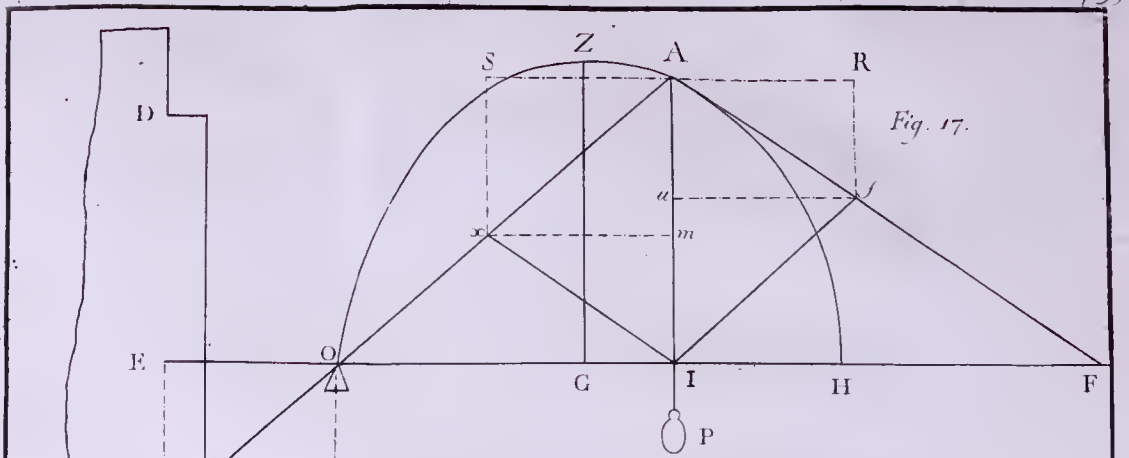


Fig. 17.

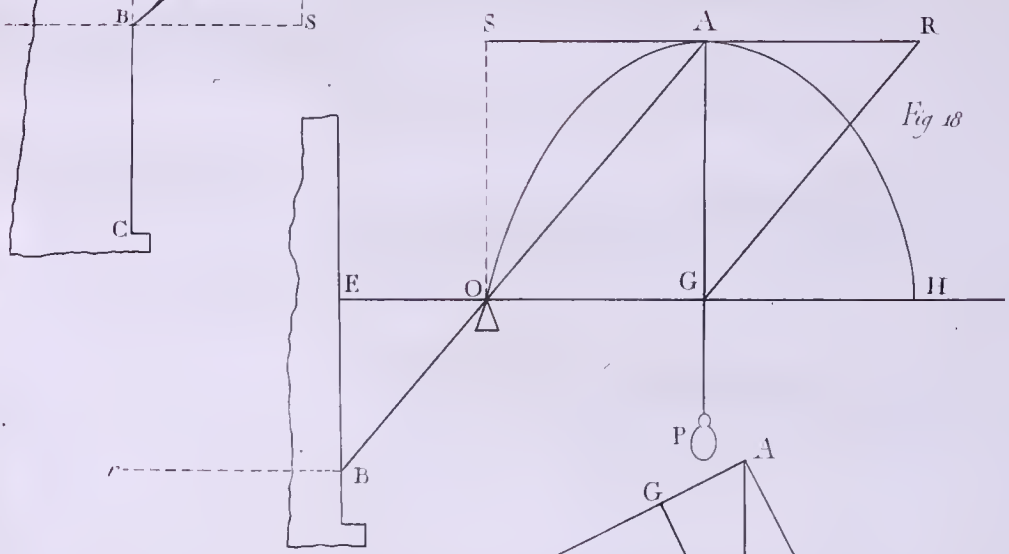


Fig 18

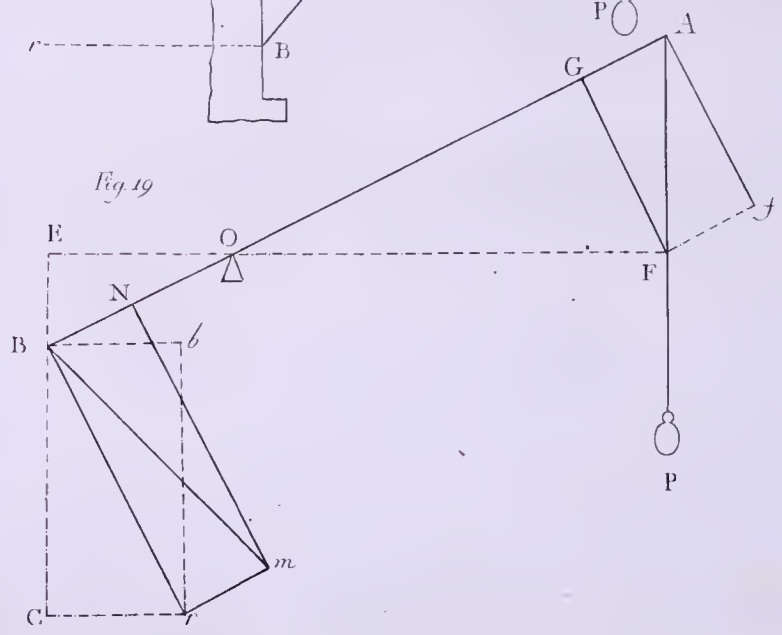


Fig 19

B*m* a B*z*, così la forza B*m* alla forza B*z*, si scoprirà essere la forza verticale B*z* uguale a $BD = p \cdot \frac{11}{16}$, ed instituendo B*m* ad *mz*, così la forza B*m* alla forza *mz*, si determinerà la forza orizzontale o perpendicolare al muro *mz* uguale a $Bb = p \cdot \frac{9 \cdot \sqrt{7}}{16}$: valori identici a' ricavati dalla soluzione del problema colla nostra teoria (§. XVIII.); il che avviene, come è facile a dimostrarsi, per risultare la forza B*m* parallela ed uguale alla doppia A*f* (Fig. XVII. Tav. III). Dall' esposta analisi pertanto concludesi che la generale soluzione del problema conseguita col combinare i due indicati principj (§. I) co' noti principj meccanici a differenza di quella che si ottiene colla semplice applicazione di essi, conduce insieme: 1.° a scoprire le direzioni per cui moverebbesi la verga nelle inclinazioni maggiori e minori di quella dell' equilibrio, 2.° a determinare la naturale direzione, e l' esatta distribuzione di tutte le forze sì contro il muro che sull' appoggio O esercitate dal peso P alla sua estremità attaccato, 3.° e per ultimo ci salva dal pericolo di risolvere in vece del proposto un altro problema, come s' è superiormente dimostrato.

AP-

APPENDICE

Di Gianfrancesco Malfatti

AL PROBLEMA DELLE PRESSIONI

Ricevuta il dì 9 Maggio 1805.

Dai Canoni del mio Tentativo sulle pressioni stampato nella Parte seconda del Tomo ottavo delle Memorie della Società Italiana delle Scienze risulta, ove considerava le pressioni che soffrono gli appoggj posti agli angoli d' un triangolo, da un peso collocato in qualche punto della sua aja; quando riducevami alla ipotesi del trasporto degli appoggj, e del peso in un sol lato di questo triangolo, onde si avesse un vette rettilineo di tre fulcri col peso posto tra due nella stessa retta; che modificando le generali formole alla supposizione di tal cangiamento, restano distribuite le pressioni nate dal peso ai soli due appoggj che ad esso più si avvicinano, dall' una, e dall' altra parte, restando senza pressione alcuna il terzo appoggio più lontano. Ora avendo io trovato per quel che sembra, una maniera di dimostrare direttamente la verità di tal proposizione, conducendo all'assurdo la distribuzione delle pressioni in tal caso a tutti e tre gli appoggj, ho creduto bene di aggiungere a quel mio scritto questa breve Memoria, la quale quando io mal non mi apponga nel mio raziocinio, presentando un perfetto consenso del teorema presente col risultato pei Canoni di quella mia ipotesi, può servire a darle una maggior forza di probabilità e renderla ai Geometri più accettevole e grata.

Sia il piano orizzontale, e triangolare posto su i tre appoggj, A, B, E (intendendo già che il piano sia rigido senza massa e senza gravità); e il peso situato in P. Per trovar le pressioni che si diramano ai punti A,B,E, faccio uso del metodo dei momenti dai meccanici con tutta l'evidenza dimostrato; e a tal uopo prendendo

do per primo asse di rotazione il lato BE dello stesso triangolo, su d' esso faccio cadere le normali AC, PD; e chiamate le incognite pressioni, di A, x; di B, y; e di E, z, e inoltre fatta $AC=q$, $PD=p$, ho a un tratto la prima equazione dei momenti; $qx=Pd$, chiamato il peso P. Il nuovo asse di rotazione, a cui riferiamo le pressioni, sia l' istessa linea PD protratta indefinitamente, alla quale dal punto A si guida la AF parallela al lato opposto BE: denominata pertanto la $BC=a$, la $CD=b$ e la $DE=c$, poichè $AF=DC$, i momenti delle pressioni rispetto a questo nuovo asse ci somministrano la seconda equazione $bx+y.\overline{a+b}=cz$; e poichè la somma delle tre pressioni dev' essere uguale al peso P, avrem pronta la terza equazione, $x+y+z=P$. Essendo $x=\frac{Pd}{q}$, sostituito tal valore nella seconda equazione e nella terza, colla opportuna disposizione dei termini nasce; $\overline{a+b}.y-cz=\frac{-Pbd}{q}$; e poi $y+z=\frac{P.\overline{q-d}}{q}$. Si adoperi presentemente in queste due equazioni il noto metodo della eliminazione, e si ha $z=\frac{P.\overline{aq-ad+bq}}{q.a+b+c}$; $y=\frac{P.\overline{cq-cd-bd}}{q.a+b+c}$, e queste sono le tre pressioni di valor cognito sostenute dagli appoggj A, B, E.

Assumo ora un' ipotesi, che siano mobili il peso P e l'appoggio A, e diriggano il loro movimento per le perpendicolari, PD, AC, cominciando con velocità proporzionali agli spazj da scorrersi, cioè proporzionali alle stesse perpendicolari, e colla legge di resistenze che incontrano alle stesse velocità proporzionali. Ognun vede che con tali dati devono arrivare il peso P e l'appoggio A nello stesso tempo al lato BE, dove restano affatto estinte le loro velocità, e per tal modo viene a formarsi un vette rettilineo a tre fulcri, col peso posto tra i due C, E: dal punto A per il peso P si conduca la linea AP, che prolungata incontra il lato BE in Q, e dentro l'angolo AQB si guidi a piacere una retta che seghi le normali AC, PD ne' punti O, p. Egli è chiaro che le porzioni Pp, AO, sono proporzionali alle intere normali DP, CA; siccome il son pure le residue Dp, CO, laonde quando nel movimento fatto col-

la

la prescritta legge l'appoggio A sarà arrivato in quel punto O, il peso P avrà scorso con moto isocrono lo spazio Pp, e in tal situazione che per cagione del movimento progressivo si può considerar come variabile, dobbiam cercare quali siano le pressioni diramate dal peso P nella situazione di p, all'appoggio A nella situazione O, e agli altri appoggj immobili B, E. Ciò si ottiene facilmente conducendo da O una parallela a BE, che incontra la retta DF nel punto S. Quì pure, chiamata $OC = t$; poichè sta $AC : PD :: OC : pD$, sarà $q : d :: t : pD = \frac{dt}{q}$; onde presi per assi di rotazione gli stessi che prima, e le nuove pressioni in O, B, E chiamate x', y', z'; per la legge dei momenti, sarà $x't = \frac{Pdt}{q}$, ossia $x' = \frac{Pd}{q}$, e però la pressione in O è la stessa che la pressione in A. Rivolgendoci ora ai momenti riferiti al secondo asse di rotazione FD, avremo x' nella distanza OS, ossia $x'b + y'.\overline{a + b} = z'c$; ma $x'b = xb$, sarà pertanto $xb + y'.\overline{a + b} = z'c$, e poichè deve essere ancora $x' + y' + z' = p$, sarà anche $x + y' + z' = P$; e per mezzo delle due equazioni ritrovati i valori di y' e di z' si troveranno essi identici coi valori di y e di z. Il perchè in qualunque punto si trovino contemporaneamente, l'appoggio mobile A e il peso P, quando essi si muovono colla prescritta legge, le pressioni distribuite dal peso P al fulcro mobile, e ai fulcri immobili, resteranno sempre invariate, e conseguentemente anche quando saranno arrivati, A in C, P in D, non devono aver sofferto alcuna alterazione, ed ivi sta tutto in quiete.

Questa conseguenza a cui ci riduce il raziocinio ed il calcolo si dimostra facilmente assurda. Imperciocchè se noi supponiamo che l'appoggio mobile A sia collocato a maggior distanza dalla BE in H di quella che aveva in A, e si concepisca muoversi verso C con una velocità proporzionale alla distanza HC, nel mentre che P, che non ha cangiata la prima sua situazione, si muove con velocità proporzionale alla sua distanza PQ, egli è certo che incontrando

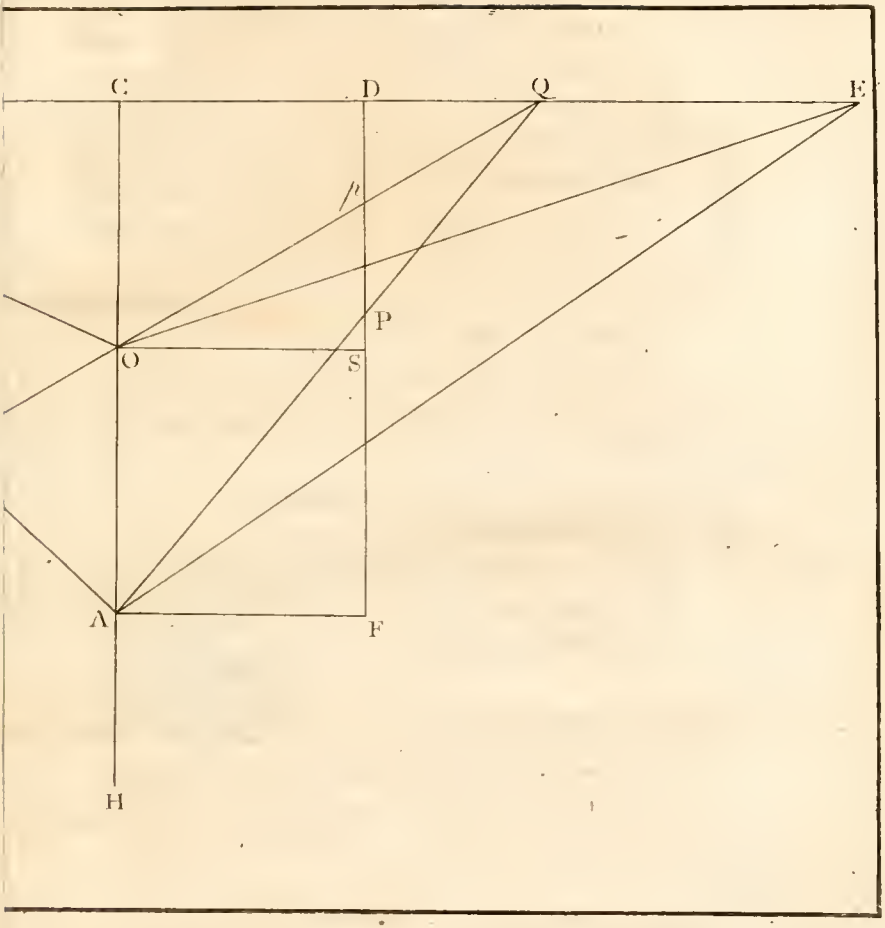
ambi-

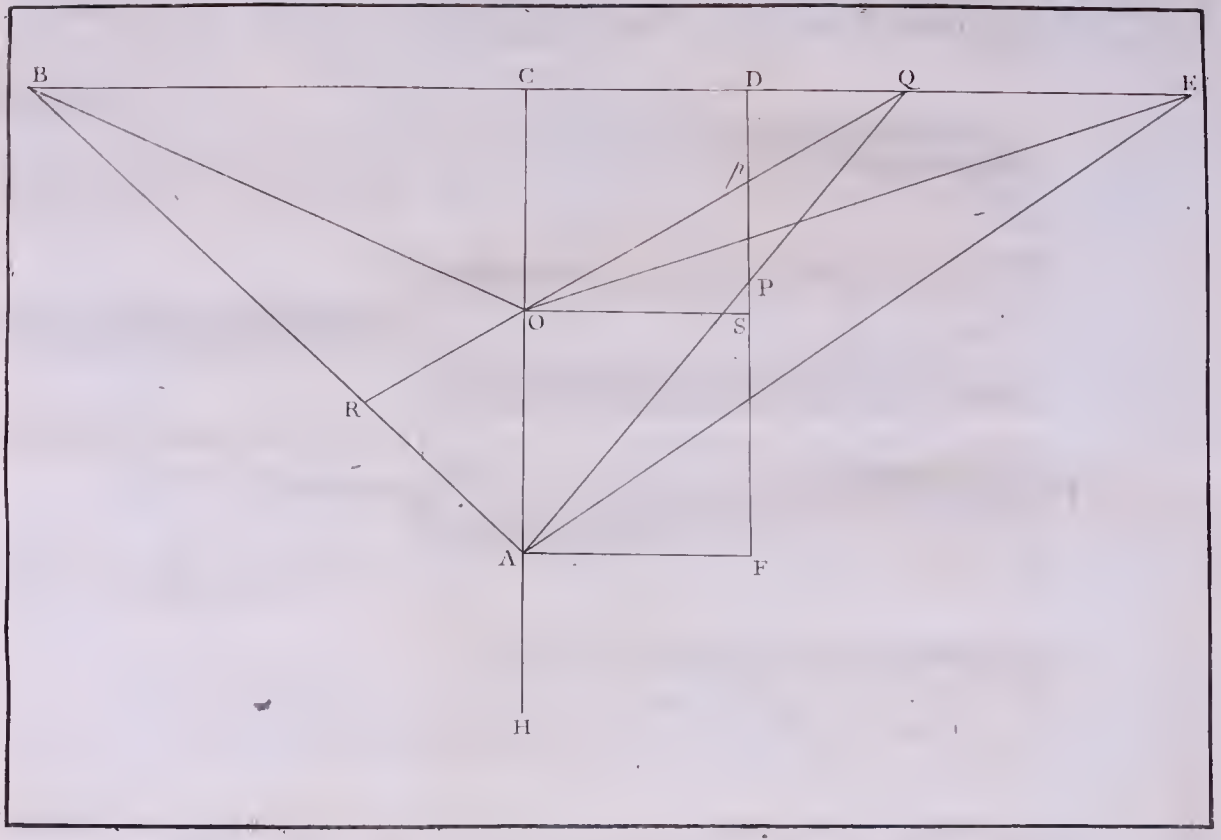
ambidue la stessa legge di resistenza, che abbiam posta nel primo caso, arriveranno contemporaneamente a poggiarsi sulla retta BE; e siccome il valore delle prime pressioni in H, B, E riman sempre il medesimo per tutte le situazioni analoghe dei punti mobili H, P, tal sarà pure quando pervenuti alla quiete si troveran posti sullo stesso vette BE e negli stessi primi punti C, D. Se per tanto si chiama HC $= r$, e x la pressione in H, per la legge dei momenti avremo $rx = Pd$ e quindi $x = \frac{Pd}{r}$: le altre pressioni poi in B e in E non varieranno dalle trovate nella prima ipotesi, che per il cangiamento che in esse induce la introduzione del simbolo r invece del simbolo q, e poichè la pressione in $C = \frac{Pd}{r}$ diventa minore della pressione $\frac{Pd}{q}$, essendo r maggiore di q, ecco che adattato il raziocinio superiore, avremo nel caso di un vette retto dove tutto è in quiete, e dove sono sempre mantenute le medesime distanze degli appoggj fra loro, e di ciascun degli appoggj dal punto dove è collocato il peso, ora pressioni maggiori ed ora pressioni minori, le quali varieranno anche all' infinito se si suppongono variati i punti dai quali l' appoggio mobile comincia il suo moto. A questo patentissimo assurdo noi arriviamo, se non si stabilisce una legge di natura la quale riduca tutto al ragionevole, e al vero, senza dar di cozzo in simili assurdità.

O io vado errato, o questa legge da sostituirsi è assai semplice e chiara. Essa consiste, a parer mio, nel principio: che collocato un peso sopra un piano orizzontale sostenuto da più appoggj, cerchi la natura di diramare ad essi le sue pressioni per linea retta e che, quando non incontri in tali rette modo di fermare la sua pressione, perchè cerca essa di fare il più presto che sia possibile il suo equilibrio, effettivamente le tramandi con certe determinate modificazioni che emanano dalle rispettive situazioni che hanno fra loro gli appoggj e il peso agli stessi appoggj; laddove quando nella diramazione delle sue pressioni per linea retta incontra più presto un punto ove stabilir l' equilibrio, senza dilungarsi a un appoggio più lontano nella stessa retta, ivi ferma la sua azione e la-

scia

scia l' appoggio più remoto senza pressione alcuna. Da questo principio deriva per conseguenza legittima la verità dei generali valori delle tre pressioni, finchè il fulcro mobile formerà cogli altri immobili un triangolo, perchè le linee rette, per le quali s' incanalano queste pressioni, non presentano ragione alcuna onde abbiano a restarsene per via. Ma quando tutto è situato in una retta medesima, il peso P nel suo appulso con essa tenta di distribuire, come faceva prima per linea retta, le sue pressioni agli appoggj, ma perchè incontra nella stessa retta l' appoggio più vicino C dell' appoggio B, ivi deposita tutta quella pressione che distribuiva all' uno e all' altro, con quel cangiamento però che salvi la legge del vette semplice da un posto tra due appoggj. Supposta pertanto tale economia osservata dalla natura nella distribuzione delle pressioni al caso che tutto ridotto al vette retto, il momento che apparteneva all'appoggio B, quando non era impedito alla pressione di giungervi per linea retta, siccome essa cessa nel punto B e si ferma in C, non è più $y.\overline{a+b}$ ma yb, essendo b la distanza di C dall' asse di rotazione FD. Quindi nei valori delle pressioni x, y, z cancellata la a che in esse introducevasi per la ragion del momento $y.\overline{a+b}$ divenuto ora yb, ci nascono le tre pressioni modificate come segue; $x = \frac{Pd}{g}$; $y = \frac{P.\overline{cq-cd-bd}}{q.\overline{b+c}}$, $z = \frac{Pbq}{q.\overline{b+c}}$. Si consolidi ora la pressione x colla pressione y, il che succede quando il punto A è arrivato a C, ed ha presentato nella retta del vette un appoggio alla diramazione per la retta BC delle pressioni. Per tal modo la pressione totale in C diventa $\frac{Pcq}{q.\overline{b+c}}$; ed abbiamo $x+y:z$ ossia la pressione totale in C, alla pressione in F come $\frac{Pcq}{q.\overline{b+c}} : \frac{Pbq}{q.\overline{b+c}} :: c : b$. Questa è la legge del vette semplice che resta egregiamente salvata quando si adotta la legge da me stabilita, che la natura cerchi di distribuire le pressioni agli appoggj in linea retta che per via non trovi appoggio che le vieti di scorrere sino agli altri più lontani, potendo essa equilibrar le sue pressio-


C
D
Q
E
p
P
O
S
A
F
H


B
C
D
Q
E
P
O
S
R
A
F
H

sioni negli appoggj più vicini. In queste ultime espressioni resta totalmente eliminato il simbolo q; il che vuol dire che da qualunque punto A o più alto o più basso s' intenda cominciare il movimento del fulcro mobile A, nel momento dell' arrivo al punto C le pressioni risultanti in C e in E saranno sempre indipendenti dall' altezza q e veramente determinate dalle sole distanze CD, DE. Essendo da ultimo chiaro, che ciò che si è detto pel vette rettilineo di tre appoggj, si può applicare ugualmente a un vette rettilineo di quattro, cinque, e in generale di qualunque numero di appoggj, concluderemo che in tali casi soi quei due che sono dall'una e dall' altra parte i più vicini al peso, sosterran le pressioni che da esso si distribuiscono, e gli altri non sentiranno pressione alcuna.

Ho supposto turbato il movimento di P e di A da una resistenza che gli faccia nel medesimo tempo arrivare ai punti C,D senza velocità alcuna, per conformarmi all' idea che un si fa del vette retto caricato d' un peso, e corredato di più appoggj, dove non considera nessun moto preesistente, e nessuna estinzione del medesimo. Ma se anche si ammetta la ipotesi del moto equabile in A e in P colle velocità proporzionali alle rispettive distanze, col nostro principio si troverà salvata la legge del vette, ancorchè nell' appulso vivano le stesse velocità.

PARALELLI E PRINCIPIO UNICO E SEMPLICE DELLE DUE TRIGONOMETRIE

Di Pietro Ferroni

Ricevuti il dì 16 *Maggio* 1805.

Come la Trigonometria rettilinea è un derivato agevolissimo della sferica, così quest' ultima apertamente nasce dalla contemplazione d'un solo caso particolare delle Piramidi tetraèdre, o per dir meglio dei Triangoli piramidali (1). Mentre difatto si concepisca tal Piramide triangolare che sia iscrittibile dentro d' un Cono retto e colla cima comune, i tre supremi angoli rettilinei delle tre faccie circoscriventi e componenti l' angolo solido della cima predetta vengono misurati o rappresentati dai tre lati d' un Triangolo sferico, e le mutue inclinazioni delle tre faccie medesime sono i tre angoli piani dell' immaginato Triangolo. L' origine vera e naturale perciò delle proprietà dei Triangoli e Poligoni sferici (e, per semplice corollario, dei rettilinei), da cui dipende la loro congrua risoluzione, deve a ragione desumersi dalla natura geometrica di quelle speciali Piramidi. Siffatta sorgente, sebbene avvertita da molti, non ispiegata nè estesa abbastanza, come facilmente potevasi, per quanto io sappia, da alcuno, rende tosto non solo contezza mercè delle Proposizioni elementari antichissime intorno gli angoli solidi (2), perchè i lati d'un Triangolo o Poligono sferico convesso presi insieme sieno sempre minori d'un'intera circonferenza di Circolo massimo della Sfera, ma con egual lume discopre le due di già note ed uniche formule fondamentali trigonometriche, *binomia* e *trinomia*, le quali (come insegnarono primi Mauduit, Euler, e Degua (3)) in ogni combinazione possibile de'VI. elementi danno l'analisi de' Triangoli sferici obliquangoli, e di cui sono una conseguenza immediata le speciali *binomie* concernenti i rettangoli. E tutti quanti quei paragoni elegantis-

tissimi, che massimamente negli ultimi anni Legendre, Delambre, e Lagrange hanno rilevato in proposito de' Triangoli sferici o finiti o infinitesimi riportati ai rettilinei loro corrispondenti (4), insieme con varj dei paralelli meno conosciuti o men ovvj, sono altrettante derivazioni facili dal Principio medesimo comparativo dei divisati Triangoli piramidali e Prismi retti dotati della stessa base ma d' altezza infinita. Anzi quella nascosa *ellitticità* (se può così nominarsi) che disvelò non ha guari Goudin nell' equazioni generali *trinomie* della Trigonometria sferica (5), riceve la sua etiologia o spiegazione diretta dal fondamento geometrico delle rammentate Piramidi, a differenza delle moltiplici analogie o derivative o sussidiarie (tra le quali le rinomate di Napier o Neper), che si risolvono in artificj di calcolo più o men composti, onde le formule primigenie così trasformate si rendano adattabili e pronte all' uso comodo dei *logaritmi*.

Mio proponimento è pertanto quello di richiamare ad un Principio solo l' una e l' altra Trigonometria, e mostrarne, se non la smarrita, almen l' obbliata provenienza comune. Il Principio geometrico, in qualità di causa prima, debb' essere generalissimo; e mal s' apporrebbe chi cominciasse l' assunto dai Triangoli rettangoli per quindi scendere mediante loro all' analisi degli obliquangoli, o dalla Trigonometria rettilinea coll' ajuto della medesima passasse alla sferica, com' è l' usanza nei corsi ordinarj: Non bisogna confondere la Sintesi didascalica, che dimostra i Teoremi e costruisce i Problemi andando gradatamente dal semplice al composto, colla Trigonometria filosofica e comparativa, alla quale s'aspetta per avventura di seguitare il metodo inverso, e far partire da un tronco primario tutte le ramificazioni diverse che compongon l' insieme di questa Scienza. Se poi alla Geometria elementare de' Greci s' unisca il facile ritrovato del Girard o del Cavalieri (6) risguardante l'area di qualunquesiasi Triangolo sferico, null' altro fa di mestieri per arrivare allo scioglimento di tutti i Triangoli data la conoscenza sola di III. de' VI. loro elementi, e per rintracciarne eziandio le varie appartenenze e misure d' ogni maniera. Imperciocchè tocca all' Algebra, e prin-

cipalmente a quella parte di calcolo che considera le *funzioni* del Circolo, l'incarico di stabilire sopra il suggerito saldissimo fondamento l'edifizio intero trigonometrico, spartirlo, decorarlo, nobilitarlo, ed osservare le regole di simetria, comodo, e convenienza, onde appresentarlo in ciascuna parte dicevole al fine ed allo scopo propostosi dall' architetto nell' ideato disegno. Ora questo è l' ufficio meramente subalterno e non mai etiologico della Scienza, come lo sarebbe di pari se dopo avutosi l' accorgimento di fare scaturir dalla Retta l'Iperbola, e dalla Periferia circolare l' Ellissi ch'ha per suo ultimo *limite* la Parabola, si ricavassero quindi mediante il soccorso più o meno ingegnoso dell' Aritmetica universale le più astruse recondite proprietà delle Coniche (7).

Contuttociò quantunque volte l'argomento ch' io tratto m' aprirà il campo a parlar brevemente d' alcuni dei principj secondarj trigonometrici e delle loro più o meno pregievoli derivazioni, quali si leggono, per tacer d' altri, nei Trattati di Maupertuis, Lagrive, Cagnoli, Carnot, ec. (8), o in alcuni articoli dell' *Enciclopedìa metodica*, o nella *Cristallografia* d' Haüy (9) massime pel modo più acconcio di considerare gli angoli solidi o piani, e ricavarne le rispettive misure, non lascierò, senza citazioni speciali, d' aggiungere all' uopo le mie riflessioni indirizzate soltanto a mostrare o la più chiara origine di certe formule che sono più in uso nella Teoria de' Triangoli, o la semplificazione d' altre espressioni della Lingua del calcolo, o le conseguenze dedotte dalla comparazione delle medesime, o finalmente preordinate a spiegare come mai si concilìino ed anzi siano precisamente equivalenti quelle regole classiche della Dottrina Sferica in apparenza discrepanti e ch' avrebber sembiante d' antinomìe .

Frattanto seguitando il costume degli Analisti, i III. angoli d'ogni Triangolo o sferico o rettilineo verranno intesi sotto A, B, C, mentre *a*, *b*, *c* rappresenteranno rispettivamente i III. lati ai medesimi opposti.

TEOREMA I.

In una Piramide triangolare iscritta o iscrittibile dentro d'un Co-

Cono retto a base circolare e d'apice comune, son sempre proporzionali alle aree delle tre faccie equicruri situate intorno la cima tanto i *seni* degli angoli delle medesime *a*, *b*, *c*, attorno della cima predetta, quanto i *seni* degli angoli opposti A,B,C delle tre faccie suddette; il che vale a dire i *seni* dei primi angoli costantemente proporzionali ai *seni* degli ultimi, o viceversa.

Perocchè 1.° in sì fatte Piramidi (Fig.ª 1.) essendo, per ipotesi, eguali fra loro i tre lati o spigoli DG, DE, DF, le aree delle tre faccie triangolari equicruri GDE, EDF, FDG hanno la proporzione medesima delle perpendicolari condotte dai punti E, F, G, vertici dei tre angoli della base GEF, sopra i lati predetti DG, DE, DF; e queste perpendicolari, in virtù di *definizioni*, tengono la ragione istessa dei *seni* degli angoli prenominati GDE, EDF, FDG circoscriventi la punta dell' angolo solido D. Oltre di che in 2.° luogo, se (per esempio) dal vertice E d' uno degli angoli della base GEF conducasi EO normale al piano della faccia opposta FDG, e dal punto d' incontro ossia piede O la perpendicolare OI a DG e l'altra OP a DF, insegnano gli *Elementi* d' Euclide (10) che condotte le rette EI, EP, son esse altresì rispettivamente perpendicolari su i lati o spigoli DG, DF; e perciò EIO, EPO (o in altri casi i loro *conseguenti*) sono gli angoli piani delle due faccie FDG, DGE, e dell'altra coppia GFD, FDE, i *seni* dei quali due angoli stanno tra loro come $\frac{EO}{EI} : \frac{EO}{EP} :: EP : EI$ :: *seno* EDF : *seno* EDG. Così proverebbesi nel paragone degli altri.

Corollario I.

Si verifica in tutte le Piramidi triangolari l'istesso Principio elegante geometrico, perchè, qualunque elle sieno, vi si possono sempre segnare su i loro spigoli, o prolungati o troncati, tre punti egualmente (o poco o molto) distanti dal vertice, rimanendo così sempre fermi i tre angoli intorno alla cima e quelli de' piani delle tre faccie che finiscon nell' apice della Piramide.

Corol-

Corollario II.

Dalla considerazione adunque d' un Triangolo piramidale nasce naturalmente (previa la sola impreteribile definizione dei *seni*) il Teorema cattolico della Trigonometria sferica, cioè $\frac{\text{Sen. } a}{\text{Sen.A}} = \frac{\text{Sen. } b}{\text{Sen.B}} = \frac{\text{Sen.}c}{\text{Sen.C}}$, che come equazione *binomia* s' applica subito ai *logaritmi*, racchiude la proprietà de' Triangoli equicruri ossia dell' eguaglianza degli angoli opposti ai lati eguali, ed è in sostanza il gran Canone negli scaleni, dei *seni* de' lati proporzionali ai *seni* degli angoli opposti, che i Geometri han finadora dedotto o a rovescio da separare i Triangoli obliquangoli in due rettangoli *sussidiarj*, o con somma finezza di studio dalla teoria delle *funzioni simetriche*, mercè della quale le due fondamentali Formule trigonometriche (Teor. I. e II. seg.) si convertono in una sola (11).

Corollario III.

Il Teorema cattolico pe' i Triangoli sferici obliquangoli somministra adesso come suo particolare il subalterno per i rettangoli, cioè, posto A l' angolo retto, $\text{Sen.}a = \frac{\text{Sen.}b}{\text{Sen.B}} = \frac{\text{Sen } c}{\text{Sen.C}}$ e così degli altri : equazione *binomia* derivativa che abbraccia sempre però (compreso l' angolo retto) IV. soli de' VI. elementi del Triangolo, ed a paragone della sua generatrice è ancora più acconcia all' uso immediato delle Tavole *logaritmiche*.

Corollario IV.

Se in vece d'una, due faccie della Piramide si dispongano col pian della terza in maniera che formin due angoli retti, ciò non puote accadere giammai, conforme insegnano gli *Elementi* (12), senza che un delli spigoli della Piramide istessa sia perpendicolare

ad

ad un tempo su i due rimanenti, ch' è quanto dire se non quando sien retti i due angoli al vertice di due de' Triangoli. Mentre poi tutte tre le faccie siano perpendicolari vicendevolmente tra loro lo saranno eziandio per la medesima ragione i tre spigoli. Ed ecco l' origine de' Triangoli sferici equicruri *birettangoli* a due quadranti, o *trirettangoli* necessariamente equilateri perchè a tre quadranti.

Corollario V.

Ricavasi oltre di ciò da un Teorema *elementare* d'Euclide (13) che i tre angoli piani delle faccie d'una Piramide triangolare presi insieme superan sempre il valor di quelli della sua base; e dalla natura della Piramide istessa si fa manifesto che mentre s' annulli la di lei altezza DQ, ed il Triangolo piramidale si converta perciò in Triangolo piano, ossia il Triangolo sferico in Emisfero del raggio QE, l' altro *limite* della *somma* dei tre angoli è di sei angoli retti: così che tra II. e VI. retti venga ad esser sempre compreso il valor coacervato dei III. angoli di qualunque siasi Triangolo sferico.

Corollario VI.

Anco a sì fatto *limite* del decremento possibile della Piramide trasmutatasi nel Triangolo rettilineo GEF, o del Triangolo sferico trasformatosi nell' emisferica Superficie e terminato dalla circonferenza del Circolo *massimo* circoscritto al primo Triangolo, appartiene quella medesima legge stabilita dal precedente Teorema; ed è che sebbene *evanescenti* o *nascenti* o per dir meglio *nulli* i *seni* dei tre angoli in E, F, G (ciascheduno di 180°) formati dagli archi circolari o lati di questo *limite* estremo de' Triangoli sferici, contuttociò sieno d' essi malgrado la lor *nullità* proporzionali alle faccie opposte, o sivvero (come nel celebre Teorema statico o centrobarico dei tre *appoggi* (14)) proporzionali alle aree dei Triangoli rettilinei FQG, QGE, EQF giacenti nel medesimo piano, o ai *seni* degli opposti angoli al centro Q che fa

la

la vece di vertice in quest' ultima combinazione o accidente della Piramide . .

Corollario VII.

Havvi l' altro *limite* per il contrario dell' accrescimento indefinito dell' altezza della Piramide, ed allora questa si cambia in un Prisma retto triangolare d' altezza infinita avente per base il Triangolo inscritto GEF: da siffatto Prisma deriva la proprietà concernente i Triangoli rettilinei, cioè dei *seni* degli angoli E, F, G, formati dalle tre faccie, proporzionali alle faccie medesime rettangolari opposte infinite, le quali stanno fra loro come le basi o lati opposti FG, GE, EF; il che è quanto dire, con maggior compendio, $\frac{a}{\text{Sen.A}} = \frac{b}{\text{Sen.B}} = \frac{c}{\text{Sen.C}}$ negli obbliquangoli (scaleni, equicruri, equilateri), ed $a = \frac{b}{\text{Sen.B}} = \frac{c}{\text{Sen.C}}$ nei rettangoli; nè manca di far conoscere ancora quì, come sopra, la semplice Geometria, che tra i *seni*, quantunque *nulli* (o da considerarsi per tali in confronto del *raggio* infinito), dei tre angoli delli *spigoli* equidistanti o non-concorrenti passavi l' istessa proporzionalità pari a quella dei tre lati opposti finiti FG, GE, EF; nè tampoco lascia di suggerire che unico essendo il caso dell' altezza QD infinita per ogni Triangolo piramidale, unica e ferma altresì debba essere la trasformazione di ciascun Triangolo sferico nel suo *specifico* Triangolo rettilineo, i cui tre angoli componendo sempre il valor di due retti (vedasi lo *Scolio* seguente), sarà questo il *limite* sempre e *limite* costantemente inferiore, dopo del quale principia tosto a ricrescere sino a VI. retti il valor della *somma* degli angoli d'un qualunque Triangolo sferico (*Corol.* V.); in che consiste la differenza potissima ed insieme l' anello d' unione delle due divisate categorie di Triangoli sferici e rettilinei.

Corollario VIII.

Tra le *varietà* infinite delli sferici obbliquangoli una si conta as-

assai degna d' osservazione speciale, come distinta dai più valenti Geometri; e quella si è d' un Triangolo sferico divisibile in due equicruri o isosceli a pari del rettilineo ortogonio. La vera e lucida origin sua rilevasi tosto con tutta evidenza dal Triangolo piramidale, la cui faccia (Fig.ª 2.ª) FDG passi per un dei diametri innumerabili del Circolo sottoposto; poichè comunque s' inclinino l' altre due, vien sempre il primo ad essere separato da un piano secante centrale DEQ in due Triangoli equicruri piramidali GDEQ, FDEQ, ove (atteso l'evidente situazione *eurit-mica* d' ognuna delle faccie eguali delle due Piramidi parziarie attorno lo *spigolo* o altezza DQ) è l'angolo piano delle due faccie QGD, GDE eguale a quello delle due QDE, DEG, e l' altro delle faccie QDF, DFE eguale al correspettivo delle due FDE, DEQ rimanenti. Da ciò risulta l' angolo (sempre ottuso sino a II. retti) contenuto dalle due faccie GDE, DEF eguale alla *somma* degli angoli intorno alli spigoli restanti DG, DF, come nel Prisma retto triangolare ortogonio, superiore suo *limite*; un *maximum* l' area del Triangolo sferico di due lati dati attorno E, non altrimente che quella del rettilineo rettangolo *limite*; *massime* l' aree dei Poligoni sferici *isoperimetri* (e perciò le solidità dei settori poligoni o Piramidi sferiche, le grandezze degli Angoli solidi, ec.) mentre si verifichino le *condizioni* medesime, le quali hanno luogo pe' i rettilinei; inscrittibile la serie immensa dei primi Triangoli ottusangoli sferici, tutti diversi di forma su differenti Sfere secondo il più o meno dell'altezza DQ, come l'altro lor *limite* rettilineo rettangolo, dentro del medesimo Semicircolo, il cui centro costante Q. Di quì si deriva eziandio la formula nota $\text{Sen.}\frac{2a}{2} = \text{Sen.}\frac{2b}{2} + \text{Sen.}\frac{2c}{2}$ (dedotta da $(2\text{Sen.})^2 \frac{1}{2} a = (2\text{Sen.})^2 \frac{1}{2} b + (2\text{Sen.})^2 \frac{1}{2} c$, ossia $\text{Cord.}^2 a = \text{Cord.}^2 b + \text{Cord.}^2 c$), non meno che comparisce palpabilmente l'estremo inferior *limite* del Triangolo sferico dell' istess' indole, quando D cada in Q, trasformantesi in un *Fuso* eguale al quarto della superficie della Sfera del raggio minimo QG, cioè in questo caso pareggiante il valore *assoluto* medesi-

mo dell' area dell' altro *Fuso* compreso tra il prolungamento dei suoi lati, e l' istesso valor *relativo* (oltre la comun *somma* di IV. retti) dell'area di ciascheduno dei *complementi* integrali dei *Fusi* provenienti dalla protrazione dei lati di tutti gli altri suddivisati Triangoli sferici posti o descritti su varie Sfere .

Corollario IX.

Gioverà molto alla pratica della classazione de' Poliedri cristallini o salini (suddivisibili generalmente in Piramidi triangolari equicruri), quando non fossero di figura regolare (15) ò Prismi retti, i cui angoli piani sarebber gl' istessi dei rettilinei delle lor basi, misurarne da prima con tutta agevolezza mediante una *scala* o *goniometro* di facile concepimento i tre angoli rettilinei intorno del vertice ed un solo degli angoli piani delle tre faccie; giacchè così, pel Coroll. II.°, conseguirebbonsi le misure *relative* dell' aree delle faccie medesime insieme coll' *assolute* degli angoli caratteristici rimanenti, conforme esigono il metodo ed ordine adoperato dai recenziori Naturalisti .

SCOLIO.

Oltre della verità geometrica nitidissima riguardante la *somma* degli angoli d'un Triangolo rettilineo, e quindi di qualunque siasi rettilinea Figura ch'abbia i suoi angoli tutti *salienti* o parte *salienti*, e nel rimanente *rientranti*, di null' altro ha bisogno l'Analisi trigonometrica eccetto che della Teoria *elementare* de' Triangoli *simili*, come quella dalla quale dipende la prova del *Teorema* universale dell'*Ipotenusa*, che dicesi Pitagorico, avvengachè la Critica dotta lo suggerisca anteriore d' assai all' età in cui fiorì il Filosofo rinomatissimo, institutore della Scuola Italica di Crotone . Il rapporto $\frac{a}{\text{Sen.A}} = \frac{b}{\text{Sen.B}} = \frac{c}{\text{Sen.C}}$ nei Triangoli ret-

rettilinei ognun vede (Fig. 1) esser espresso da $\frac{GF}{\frac{1}{2}GF} = 2\,GQ$ ossia al diametro del Circolo circoscritto al Triangolo, e vale a dire (16) al prodotto dei tre lati dell' istesso Triangolo diviso pel doppio della sua area S, cioè $= \frac{abc}{2S}$, espressione parimente geometrica del rammentato diametro; dalla *simetrica* forma della qual' espressione rispetto a ciascuno dei lati a, b, c apparisce in conferma l'identità di quei tre rapporti. E come la proprietà del Triangolo rettilineo ortogonio è conseguenza dell' affezione generalissima (della quale gli antichi non n' ebbero accorgimento (17)) spettante al Triangolo piramidale *trirettangolo* (Coroll. IV), d' onde nasce la dimensione analitica di tutte le Superficie possibili; così quell' ultima formula è inerente nell'altra più universale che riguarda ogni Triangolo piramidale a faccie equicruri. Perocchè $\frac{\text{Sen.}a}{\text{Sen.A}} = \frac{\text{Sen.}b}{\text{Sen.B}} = \frac{\text{Sen.}c}{\text{Sen.C}} = \frac{\text{Sen.}a.\text{Sen.}b.\text{Sen.}c}{6\Sigma}$ (posta Σ la solidità del Triangolo) $= \frac{3.\text{Sen.}a.\text{Sen.}b.\text{Sen.}c}{6P}$ (nominata P la solidità del Prisma egualmente alto) $= \frac{\text{Sen.}a.\text{Sen.}b.\text{Sen.}c}{2P}$; formula analoga, *simetrica* anch'essa, e che non finora appieno considerata si converte manifestamente nell' altra proporzionale $\frac{\text{Sen.}a.\text{Sen.}b.\text{Sen.}c}{2S}$ $= \frac{abc}{2S}$, come sopra. Consimile *paralello* scaturisce altresì dal paragone che voglia farsi della solidità di quel Triangolo piramidale equicrure colla solidità del Prisma dell'istessa base ed altezza, quando questa diventi *infinita*. Difatto

$$\Sigma = \frac{d^3}{3}\sqrt{\frac{\text{Sen.}\frac{a+b+c}{2}.\text{Sen.}\frac{a+b-c}{2}.\text{Sen.}\frac{a+c-b}{2}.\text{Sen.}\frac{c+b-a}{2}}{}},$$

supponendo d lo spigolo o lato; e perciò

$$P = d\,.\,S = d^3\sqrt{\frac{\text{Sen.}\frac{a+b+c}{2}.\text{Sen.}\frac{a+b-c}{2}.\text{Sen.}\frac{a+c-b}{2}.\text{Sen.}\frac{c+b-a}{2}}{}},$$

o siv-

o sivvero $S = \sqrt{\left(\frac{d.\text{Sen.}\frac{a+b+c}{2}.d.\text{Sen.}\frac{a+b-c}{2}.d.\text{Sen.}\frac{a+c-b}{2}.d.\text{Sen.}\frac{c+b-a}{2}}{}\right)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)}$, ch'è la formula nota (e poco analoga alla celebre di Lhuillier Tang. $\frac{1}{4}\Sigma$ ec. (18)) dell' area d' ogni Triangolo rettilineo (senz' analogia o *paralello* vero adattabile all' altra non ridotta Tang. $\frac{\Sigma}{2}$ ec. confrontata da Lagrange (19) in proposito dell' area Σ del Triangolo sferico), dalla quale ricavansi tosto i due *raggi* del Circolo circoscritto ed iscritto, presupposta la conoscenza dei soli lati.

Conseguenza del medesimo nesso tra quei Triangoli piramidali ed i rettilinei lor *limiti* è la commnione degli istessi attributi d'eguaglianza o identità, quando questi si partono dal gran principio intuitivo di soprapposizione e *combaciamento*. Gli antichi Scrittori e Greci ed Arabi *Sphaericorum* n' hanno diffusamente parlato; ma non posso concorrere nel sentimento dei moderni Geometri, dove trattando dei Triangoli sferici *simetrici* (Fig. 3) giudicarono che ivi mancasse, per la prova dell' eguaglianza, l' appoggio della *coincidenza*, quale compete visibilmente, rivoltandoli, ai Triangoli rettilinei. Perchè rivoltati di pari gli sferici (siccome altrove ho notato (20)), e posto e fatto passeggiare il convesso dell' uno sull'omologo convesso dell' altro o il concavo sopra il concavo, tutti i punti degli archi respettivamente eguali di Cerchj *massimi* innumerabili segnati nell'area del primo caderanno un su l' altro e combineranno insieme per soprapposizione *successiva* (egualmente evidente come la *simultanea*) qual' orlo di ruota su quello di ruota eguale, d' onde nasce il *combaciamento* di tutte le parti o *elementi*, e delle superficie intere comprese tra i contorni medesimi dei due Triangoli.

Nè mi persuade tampoco la differenza, che la massima parte dei Trigonometri incontrano ogni volta che scendono alla soluzione del *caso* o modo di rintracciare i tre lati di un Triangolo conosciuti i tre angoli, chiamando il Problema *indeterminato* nei

nei rettilinei e viceversa *determinato* nei sferici. Egli è questo per il contrario suscettibile di soluzioni infinite, cioè d' una serie di Triangoli innumerabili, tutti tra loro *simili*, sì negli uni, come negli altri; e siffatto *caso* in entrambi *determina* solamente la *specie* e non mai la *grandezza* di quel Triangolo o sferico o rettilineo. Gli archi difatti del Triangolo sferico, che ne risultano, espressi in *gradi*, *minuti*, ec., sono, anco sopra una medesima Sfera (quantunque non sembri andarne sempre d' accordo Legendre (21)) grandezze *relative* e non *assolute*, ed appartengon di più ad innumerevoli Sfere, tutte diverse di *raggio*, come *relativi* son parimente i valori *tavolari* dei tre *seni* degli angoli opposti, che somministrano i rapporti dei lati d' innumerabili Triangoli rettilinei della medesima *specie*. Si direbbe con più precisione che tagliata la Piramide della Fig. 1., o il di lei prolungamento mediante un piano paralello alla base, tutti gli innumerevoli Triangoli piramidali equicruri, che ne nascerebbero, e le loro basi o *limiti* o basi de Prismi respettivi, rappresentassero i primi gli innumerabili Triangoli sferici *simili*, le seconde gl' innumerabili rettilinei parimente *simili*, cioè non diversi se non se di *grandezza*; la quale diversità non può mai perquotere gli angoli o lineari o piani o solidi, perchè appartengono alla *situazione*, ma i soli lati o spigoli o faccie e lor dipendenze, che unicamente si riferiscono alla grandezza delle figure e dei figurati.

E quì mi piace riflettere che nella serie infinita dei Triangoli *simili* o dati di *specie*, posto che ancora, indipendentemente dalle Piramidi, si volessero considerare i rettilinei sulle superficie delle Sfere, vi sarebbero sempre due differenti maniere d'imaginarli: la prima come *infinitesimi* di data *specie* sopra una Sfera *finita*; la seconda come *finiti* di data *specie* sopra una Sfera di raggio *infinito*. Ora imaginandoli della prima maniera, è facile accorgersi come l' area di quel Triangolo *differenziale* pe' i ritrovati Cavaleriani essendo eguale alla superficie d' un Semifuso sferico A+B+C—2D (nominato D un angolo retto), e dovendo ad un tempo considerarsi qual *limite* od *elemento* della superficie

ficie d' ogni *finito* Triangolo sferico, somministri subito A+B+C−2D=0, cioè A+B+C=2D; ch'è appunto la proprietà caratteristica dei Triangoli rettilinei a differenza degli sferici, e dall' *infinitesimo*, di qualunque *specie* esso sia, trasportasi subito al *finito* suo *simile*, considerandolo nella seconda maniera sopra la sferica Superficie *infinita*. Coll' area di quel Triangolo-*limite* combina mirabilmente la formula dell' area del Triangolo sferico $\frac{2\,\text{Sen.}\frac{a}{2}.\,\text{Sen.}\frac{b}{2}.\,\text{Sen.}\frac{c}{2}}{\text{Sen.}\Phi}$ stabilita da Lagrange, come l' altra della solidità della corrispondente Piramide equicrure centrale $\frac{2\,\text{Sen.}\frac{a}{2}.\,\text{Sen.}\frac{b}{2}.\,\text{Sen.}\frac{c}{2}}{3\,\text{Tang.}\Phi}$ (22): perocchè la prima (Φ distanza dal *polo* del Circolo circoscritto, il cui raggio Sen. $\Phi = \Upsilon$, diventando allora un arco *differenziale*) convertesi in $\frac{2\left(\frac{a}{2}.\frac{b}{2}.\frac{c}{2}\right)}{4\Upsilon} = \frac{abc}{4\Upsilon}$; mentre la seconda si cambia in $\frac{2\left(\frac{a}{2}.\frac{b}{2}.\frac{c}{2}\right)}{\frac{3\,\text{Sen.}\Phi}{\text{Cos.}\Phi}} = \frac{1}{3}.\frac{abc}{4\Upsilon}$, rendendosi manifesto in tal caso Cos.$\Phi = 1$, altezza della divisata Piramide. E la *metamorfosi* del Triangolo sferico nel rettilineo *elementare* (e *finiti* suoi *simili*) scuopresi chiaramente dalla versione della volgar formula *simetrica* (Corollarj II. e VII.) $\frac{\text{Sen.}a}{\text{Sen.A}} =$ $2\,\text{Tang.}\Phi.\,\text{Cos.}\frac{a}{2}.\text{Cos.}\frac{b}{2}.\text{Cos.}\frac{c}{2} = 2.\frac{\text{Sen.}\Phi}{\text{Cos.}\Phi}.\text{Cos.}\frac{a}{2}.\text{Cos.}\frac{b}{2}.\text{Cos.}\frac{c}{2} =$ (nel *limite*) $\frac{2\Upsilon}{1}.1.1.1 = 2\Upsilon = \frac{a}{\text{Sen.A}}$, come ho provato di sopra.

Del resto può adesso con tutta verità assicurarsi 1.° che in virtù delle *definizioni* ordinarie ed indispensabili delle *Linee* trigonometriche non v' ha formula resolutiva dei Triangoli sferici e rettilinei, la quale non possa esprimersi con un' *equazione* composta di *cognite* e soli *seni* e *coseni* (o soli *coseni*) mercè del Teo-

re-

rema dell' *Ipotenusa*, ossia de' Triangoli equiangoli o *simili*; 2.° che tutte le conversioni delle poche formule *primitive* in altre più comode *equipollenti*, o son risultanze di *sostituzioni* adoprate e condotte a fine per mero meccanismo di calcolo, o più presto s' appoggiano all' unica ricerca del *seno* della *somma* o *differenza* di due angoli, la quale, anco senza dedurla dai Triangoli *simili*, dipende da un Teorema *elementare* del Quadrilatero o Tetragono inscritto dentro d' un Circolo (23), che per il meno risale sino all' epoca di Tolomeo, Geografo e Astronomo di Alessandria d' Egitto, o meglio (24) dal Corollario VII. antecedente e dalla prova poco innanzi motivata, ed a mio parere semplicissima e nuova, della *somma* degli angoli di un Triangolo rettilineo eguale sempre a due *retti*.

TEOREMA II.

Come da considerar le due rette EP, EI (Fig. 1.) nacque l' Equazione *binomia* trigonometrica; così dalla considerazione delle altre due OP, OI nasce l' universale *trinomia*, che sola abbraccia tutta intera l' *analisi* d' ambedue le Trigonometrie.

Ed in vero ripreso il solito Triangolo piramidale equicrure, avente per *limite* il rettilineo, argumentasi dalle cose già dette e dalla *definizione* de' *seni* ec. essere OP=EP.Cos.C=*d*.Sen.*b* Cos.C, non meno che OI = EI.Cos.B = *d*.Sen.*c*.Cos.B. Ma visibilmente nel *limite* (cioè quando la Piramide diventi Prisma) OP + OI = FG, ch'è quanto dire, *d*.Sen.*b*.Cos.C + *d*.Sen.*c*.Cos B = *d*.Sen.*a*, ovvero Sen.*a* = Sen.*b*.Cos.C + Sen.*c*.Cos.B. Ecco dunque frattanto la *forma* della cercata Equazione *trinomia* tra V. (e non più IV.) *elementi*. All' effetto di generalizzarla ed estenderla a tutti i *casi*, salvo la *forma* oramai trovata, vi si debbono aggiungere *coefficienti* in *coseni* (*Scol.* prec.) a due qualunque dei termini suoi; poichè tornerebbe l' istesso, come l'Algebra o Aritmetica insegna, aggiungendoli a tutti tre, dei quali è composta. Evvi però una *condizione* immancabile da satisfare, che come *criterio* o riscontro di verità, all' Analista dee servi-

vire di guida nell' assegnazione specifica de' *coefficienti* predetti. Quella si è che la formula universale fa di mestieri che combini coll' altra particolare, cui condurrebbe per rapporto al Triangolo equicrure-piramidale rettangolo. Ora (Cos.*b*)Sen.*a* = (Cos.*a*)Sen.*b*.Cos.C+Sen.*c*.Cos.B, posto il *caso* di B angolo retto, cambiasi evidentemente in $\frac{\text{Sen.}a}{\text{Cos.}a} \times \frac{\text{Cos.}b}{\text{Sen.}b} = \text{Cos.C}$, cioè $\frac{\text{Tang.}a}{\text{Tang.}b} = \text{Cos C}$, o sivvero 1 : Cos.C : : Tang.*b* : Tang.*a*; il che è come scrivere EP : PO = EM : GM (perchè allora il punto O cade in G) : : Tang. EDM : Tang. GDM ossia Tang. *b* : Tang.*a*. Rimane perciò al paragone verificata appieno la formula che investigavasi, e nella qual si concentrano tutta la Scienza e la pratica *trigonometrica*.

Corollario I.

Da quest' unica *Equazione* classica tra V. *elementi* concernente i Triangoli piramidali o sferici obliquangoli si deducono, mediante il Calcolo delle *sostituzioni* e col soccorso dell' Equazione *binomia* somministrata dal I. *Teorema*, altre tre composte di IV. *elementi*, le quali in sostanza insiememente colla ritrovata son una (25).

I. Cos.*b* Sen*a* .= Cos.*a* Sen.*b*Cos.C + Sen.*c* Cos.B

II. Cos.*c* = Sen.*b* Sen.*a* Cos.C + Cos.*b* Cos.*a*

III. Cot.*b* Sen.*a* = Cot.B Sen.C + Cos.*a* Cos.C

IV. Cos.C = — Cos.B Cos.A + Sen.B Sen.ACos.*c* .

E l' ultima coincide colla seconda [data da De Gua come cardine o perno di tutta la Trigonometria (26)] mutando soltanto gli archi o lati in angoli di *supplemento* (misurati da archi ancor dessi), e viceversa, per mezzo de' Triangoli sferici *supplementi* o *polari*, di tal maniera che così sviluppate non son altro che sole III. Equazioni fondamentali *trinomie* tra V. o IV. *elementi* comunque disposti d'un Triangolo sferico obliquangolo, nelle *quattro* combinazioni varie tra le *quindici*, che apparterrebbero in generale a tutti i *quadernarj* possibili di *sei* parti integranti, le quali

li combinate a *quaderne* conducono allo scioglimento de' VI. *casi* proponibili alla sagacità del Geometra.

Corollario II.

Nascono da quelle tre Formule [giacchè la IV., come s'è detto, è una *replica* inutile per la Trigonometria rettilinea, ove *dati* due, non che tre angoli, vien subito dato dalle *Tavole* de' *seni* anco il rapporto dei lati (*Scol.* preced.)] le III. analoghe parimente *trinomie* relative ai Prismi-*limiti* o ai Triangoli rettilinei; ed abbracciando V. *elementi* per ciascheduna sono, a parer di Carnot (27), la chiave di tutti *quattro* i *casi* possibili dell'*analisi* degli obliquangoli. Anzi non altramente che nei Triangoli piramidali le *tre* si riducono ad *una*; ed è quella OP+OI=FG di già prenotata (Dimostraz. del *Teor.* II.), che si può dire la sola *generatrice* di tutte, compresa come *limite* nella I. del Corollario precorso sul punto od istante dell' *evanescenza* degli angoli a, b della divisata Piramide. Imperciocchè si conseguisce in tal circostanza, a motivo di Sen.$a = a$, Sen.$b = b$, Sen.$c = c$, Cos.$b = 1$, Cos.$a = 1$,

I. $a = b\text{Cos.C} + c\,\text{Cos.B}$; e permutando le *specie*
II. $b = a\text{Cos.C} + c\text{Cos.A}$
III. $c = a\text{Cos.B} + b\text{Cos.A}$.

Nè far dee meraviglia se nei rettilinei obliquangoli abbiansi IV. soli *casi* diversi a confronto de' VI. degli sferici; perchè uno, in virtù della riflessione premessa, rimane escluso mercè dell' indole dei Triangoli; ed i II. *casi* degli sferici d' un lato e due angoli *dati*, o entrambi *adjacenti*, o un *adjacente* e l'altro *opposto*, fanno un *caso* solo nei rettilinei, ove d'intima loro natura *dati* due angoli sempre conoscesi il terzo. E la preposta *Equazione* trigonometrica tanto più ha da riputarsi classica ed originale in quanto che ella s' estende, partendo dall' istesso principio e *mutatis mutandis*, a tutti i Poligoni (sian essi nel medesimo pia-

no o no come i *gauches*), non meno che ai Poliedri, chiamate lati le loro faccie.

Corollario III.

Ma anche la II. Equazione de' Triangoli sferici, come *derivata* dalla I. (*Corol.* I.), conduce a quelle particolari attenenti ai Triangoli rettilinei. Cercando difatto il *limite* di $\text{Cos.}c = \text{Sen.}b\ \text{Sen.}a\ \text{Cos.C} + \text{Cos.}b\ \text{Cos.}a$, avremo tosto $1 - \frac{c^2}{2} = ba\ \text{Cos.C} + \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)$, ovvero $1 - \frac{c^2}{2} = ba\ \text{Cos.C} + 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, cioè $2ba\ \text{Cos.C} = b^2 + a^2 - c^2$; Equazione fondamentale trigonometrica tra IV. *elementi*, che appoggiata ad un *Teorema* d' Euclide (28) è l' unica base di tutta la Trigonometria rettilinea, ed acquista per la *permutazione* le tre speciali *forme* seguenti

$$\text{I.}^a \quad 2ba\ \text{Cos.C} = b^2 + a^2 - c^2$$
$$\text{II.}^a \quad 2bc\ \text{Cos.A} = b^2 + c^2 - a^2$$
$$\text{III.}^a \quad 2ac\ \text{Cos.B} = a^2 + c^2 - b^2$$

Sommate queste *forme* speciali a due per due, procedono l'Equazioni a V. *elementi* del Corollario passato; così che tanto l'une che l' altre respettivamente si copiano, e mostrano chiara la loro origine comune. Per esempio la I.^{a} colla III.^{a} fan nascere $2a\,(b\text{Cos.C} + c\text{Cos.B}) = 2a^2$, o sivvero $b\text{Cos.C} + c\text{Cos.B} = a$; e l' istesso delle rimanenti intravviene. In proposito poi del significato della III.^{a} Equazione del *Coroll.* I., da verificarsi come *limite* anch' essa ne' Triangoli rettilinei, giova brevemente avvertire, che $\text{Cot.}b\ \text{Sen.}a = \text{Cot.B Sen.C} + \text{Cos.}a\ \text{Cos.C}$ allora trasmutasi in $\frac{a}{b} = \frac{\text{Cos.B}}{\text{Sen.B}}\text{Sen.C} + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\text{Cos.C}$, cioè $\frac{a}{b}\text{Sen.B} = \text{Cos.B Sen.C} + \text{Cos.C Sen.B} - \frac{a^2}{2}\text{Cos.C Sen.B} = \text{Sen.}(\text{B} + \text{C}) - \frac{a^2}{2}\text{Cos.C Sen.B} = \text{Sen}\,(180^\circ - \text{B} - \text{C}) - \frac{a^2}{2}\text{Cos.C Sen.B} =$

Sen.

Sen.A $= \frac{a^2}{2}$ Cos.C Sen.B, onde proviene per *limite* ultimo $\frac{a}{b}$ Sen.B = Sen.A, o sivvero $\frac{a}{b} = \frac{\text{Sen.A}}{\text{Sen.B}}$, che riconduce in circolo mirabilmente d' accordo l' Equazione *binomia* già nota del Corollario VII. del I. *Teorema* (colla *permuta* delle *specie*, suddivisibile in III. fra IV. *elementi*), e manifesta ad un tempo ch' ell' era, com' è difatti (29), contenuta *virtualmente* nella III. *generale* predetta.

Corollario IV.

Le IV. Formule del *Corollario* I. (ossia l' unica *universale*) somministrano facilmente l' Equazioni *binomie* per l' *analisi* de' Triangoli sferici ortogonj e lor dipendenti, cioè isosceli, aventi un lato eguale a un *quadrante*, o la *somma* di due lati agguagliantesi ad una *semicirconferenza*, o ciò ch' è l'istesso, quella degli angoli opposti pari a due *retti* (30), come dall' altre del *Corollario* II. si derivano le *binomie* pe' i rettangoli rettilinei. Così i VI. *casi* della risoluzione de' Triangoli rettangoli sferici dipendono dall' adoprare le *sei* consecutive Equazioni.

1.° Posto B angolo retto, si cambia la I. in $\frac{\text{Cos.}b}{\text{Sen.}b} = \frac{\text{Cos.}a}{\text{Sen.}a}$ Cos.C, cioè, Cot.b = Cot.a Cos.C;

2.° Posto C angolo retto, si cambia la II. in Cos.c = Cos.b Cos.a;

3.° Posto C angolo retto, si cambia la III. in Cot.B = Cot.b Sen.a;

4.° Posto C angolo retto, si cambia la IV. in Sen.B Sen.A Cos.c = Cos.B Cos.A, ossia, Cos.c = Cot.B Cot.A;

5.° Posto B (ovvero A) angolo retto, si cambia l' istessa IV. in Cos.C = Sen.A Cos.c, ovvero, = Sen.B Cos.c;

6.° Posto B angolo retto, e combinata la 1.ª colla 5.ª s' ottiene Cot.b = Cot.a Sen.A Cos.c, ossia, $\frac{\text{Cos.}b}{\text{Sen.}b} = \frac{\text{Cos.}a}{\text{Sen.}a}$. Sen.A Cos.$c$, ovvero, Sen.$b$ = $\frac{\text{Sen.}a \text{ Cos.}b}{\text{Cos.}a \text{ Sen.A Cos.}c} = \frac{\text{Sen.}a}{\text{Sen.A}}$ in virtù della 2.ª, che riconduce a quella del *Corollario* III.° del I.° *Teorema*, l' avvalo-

lora ad un tempo, e dimostra d' essere intimamente racchiusa nell' espressione *generica* trovata pe 'l mezzo del presente *Teorema* II.° E queste VI. Formule, tutte *binomie*, ognun vede che sono acconcie a subire immediatamente il computo *logaritmico*.

Corollario V.

Molto più agevole è la deduzione delle *regole* particolari pe' i IV. *casi* diversi dell'*analisi* de' Triangoli rettilinei parimente ortogonj da ciascuna delle III. Formule generali del *Corollario* II.° Conciossiachè

1.° Se B sia un angolo retto, la I.ª trasmutasi in $a = b$ cos. C.

2.° Nella medesima ipotesi, a motivo di $C + A = 90°$, la I.ª convertesi in $a = b$ Sen. A (Coroll. VII.°).

3.° Fatto l' istesso supposto, e ricavato dalla III.ª $b = \frac{c}{\text{Cos.A}}$, proviene dall' ultima $a = c\frac{\text{Sen.A}}{\text{Cos.A}} = c$ Tang. A.

4.° E finalmente nell' istessa supposizione, e per il motivo non ha guari accennato, $a = c$ Cot. C:

Equazioni tutte *binomie*; che del pari deriverebbonsi da quelle del *Corollario* III.°, e si risolvono senz' altro presidio coi *logaritmi*.

Corollario VI.

Delle due coppie di rette del Triangolo piramidale e del rettilineo suo *limite*, cioè EP, EI considerate nel *Teorema* I.°, ed OP, OI contemplate in questo II.°, l' appoggio unico o tronco comune, da cui si partono, è l' altra retta EO perpendicolare al piano della faccia della Piramide opposta ad E, ossia FDG, e quindi al lato FG dopo cambiatasi la detta Piramide in Prisma. Or questa retta EO è molto significativa per rapporto all'*analisi* praticata de'Triangoli obliquangoli sì sferici che rettilinei, quantunque proceda direttamente, come abbiam visto, dall' *elementar* Geometria. Imperocchè il pian del Triangolo DEO taglia visi-

sibilmente il Triangolo piramidale equicrure obliquangolo (o sivero lo sferico) in due parziarj Triangoli piramidali equicruri rettangoli; e nel *limite* la retta EO taglia perpendicolarmente il lato FG, e divide perciò il Triangolo rettilineo (o Prisma retto) obbliquangolo in due parziarj rettangoli. Di quì prendono origine la soluzione *indiretta* degli obliquangoli collo spartirli in rettangoli, la dipendenza dei primi dagli ultimi per mezzo d'un angolo di soccorso o *sussidiario* e dello spartimento in due *segmenti* del lato opposto, quantunque volte fia d' uopo prolungato a proposito, e finalmente la riduzione delle formule trigonometriche a due simultanee *binomie*, adattabili al maneggio dei *logaritmi*. E che sia così, vien ciò confermato mirabilmente dall' accordo del calcolo di Lagrange (31) coll' analogia discoperta nel passato *Scolio* dell'aree dei Triangoli sferici e rettilinei. Difatto la normale $EO = 2\sqrt{\left(\frac{\frac{a+b+c}{2}\,\frac{a+b-c}{2}\,\frac{a+c-b}{2}\,\frac{c+b-a}{2}}{a}\right)}$ nei rettilinei, per li *Elementi*; laonde in virtù del *paralello* provato, il *seno* EO dell' arco perpendicolar negli sferici (rimontando dal *limite*) $= 2\sqrt{\left(\frac{\frac{\text{Sen.}\frac{a+b+c}{2}}{2}\,\frac{\text{Sen.}\frac{a+b-c}{2}}{2}\,\frac{\text{Sen.}\frac{a+c-b}{2}}{2}\,\frac{\text{Sen.}\frac{c+b-a}{2}}{2}}{\text{Sen. } a}\right)}$, come s' avvera arrivandovi per altro metodo. E non che il *paralello* sussista nei soli Triangoli ortogonj, s' estende egualmente ai Trapezj *birettangoli* e sferici e rettilinei, perchè il *limite* dell' espressione analitica dell'area Σ d'un Trapezio sferico, cioè $\text{Tang.}\frac{\Sigma}{2} = \frac{\text{Sen.}\frac{\beta+\gamma}{2}.\text{Tan.}\frac{A}{2}}{\text{Cos.}\frac{\beta-\gamma}{2}}$ diventa $\frac{\Sigma}{2} = \frac{\frac{\beta+\gamma}{2}.\frac{A}{2}}{1} = \frac{\beta+\gamma}{2}.\frac{A}{2}$, ovvero $\Sigma = \frac{\beta+\gamma}{2}.A$ per l' area d' un Trapezio *infinitesimo* rettilineo; ch' è quanto dire l' istessa Formula rappresenterà l' area d' un Trapezio *simile finito birettangolo* rettilineo, e l' Agrimensura *sferica* di tutti i Poligoni segnati sopr' una Sfera sarà in perfetta armonia colla *piana*. Anzi in quei pochi *càsi*, ne' quali l' *anàlisi logaritmica* dei Triangoli si conseguisce senz'arco o angolo *sussidiario*, le due *Re-*

go-

gole rinomate di *Neper*, che vi conducono (l' altre due rimanenti non essendo che *repliche* delle prime tradotte ai Triangoli *polari*), sono strettamente connesse col Teorema notissimo *elementare* Euclidèo (32) delle *secanti* d'una circonferenza di Circolo, dipendente dai Triangoli *simili*, o se si faccia a meno di loro, dal *Coroll.* VII.° del I.° *Teorema*; stante che Tang. $\frac{A+B}{2}$. Tang. $\frac{C}{2}$ = Cos. $\frac{a-b}{2}$, e Tang. $\frac{A-B}{2}$. Tang. $\frac{C}{2}$ = Sen. $\frac{a-b}{2}$ danno insiem combinate, Tang. $\frac{A+B}{2}$: Tang. $\frac{A-B}{2}$: : Sen. $\frac{a+b}{2}$ $\times$ Cos. $\frac{a-b}{2}$: Sen. $\frac{a-b}{2}$ $\times$ Cos. $\frac{a+b}{2}$; laonde nel *limite* o Triangolo rettilineo *infinitesimo* (perciò ancora nel *finito* suo *simile*) Tang. $\frac{A+B}{2}$: Tang. $\frac{A-B}{2}$: : $\frac{a+b}{2}$ $\times$ 1 : $\frac{a-b}{1}$ $\times$ 1, ossia $a+b:a-b$ :: Tang. $\frac{A+B}{2}$: Tang. $\frac{A-B}{2}$, ch' è il vero modello originale o prototipo geometrico delle poscia scoperte Formule *Neperiane*. E per non tornare a discorrere questo argumento, osservo che sparisce nei rettilinei Tang. $\frac{C}{2}$, ed i V. *elementi* sferici si riducono a IV. perchè *dati* A e B, il terz' angolo C è allor sempre *noto*, essendo eguale 180° — A — B, nè vi può essere in conseguenza mai luogo a farne soggetto di particolar ricerca analitica. Lo confermano infatti le medesime espressioni di *Neper*: imperocchè la I.ª si cambia in Tang. $\frac{A+B}{2}$. Tang. $\frac{C}{2}$ = $\frac{1}{1}$ = 1, cioè Tang. $\frac{C}{2}$ = Cot. $\frac{A+B}{2}$, onde procede $\frac{C+A+B}{2}$ = 90°, e quindi Tang. $\frac{A-B}{2}$ $\times$ Cot. $\frac{A+B}{2}$ = $\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}}$, cioè Tang. $\frac{A+B}{2}$: . . . . Tang. $\frac{A-B}{2}$: : $a+b : a-b$, come sopra. Di più nel Problema di rintracciare qualunque degli angoli d'un Triangolo sferico o retti-

li-

lineo, di cui *diansi* i tre lati, anco più chiaro si manifesta il *parallello* delle due Formule conducenti al valore dell' angolo *incognito* A, essendo che Tang. $\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{Sen. } \frac{a+b-c}{2} \cdot \text{Sen. } \frac{a-b+c}{2}}{\text{Sen. } \frac{b+c+a}{2} \cdot \text{Sen. } \frac{b+c-a}{2}}}$ diventa appunto nel *limite* Tang. $\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}}$, coerentemente alla conosciuta espressione analitica derivata da $\frac{\text{Sen. } \frac{1}{2} A}{\text{Cos. } \frac{1}{2} A}$, ed applicabile ai *logaritmi* (33):

Corollario VII.

Chiunque rifletta alla varia composizione di tutte le precedenti Formule universali e particolari, ne ricaverà tosto il *criterio* per saper distinguere i *casi*, nei quali l' *analisi* de' Triangoli o sferici o rettilinei porti, o portar possa se certe *condizioni* speciali manchin nei *dati*, ad una doppia soluzione; e questo accade tutte le volte che l' *elemento* incognito, o angolo o lato ch' ei sia, dipenda da un *seno*, e non da altra *funzione*, come *coseno*, *tangente*, *cotangente*, ec., la quale involva linee trigonometriche, cambianti *segno* per rapporto agli angoli o lati *supplementari*. Le medesime Formule insegnano quali sien anco i *casi* o combinazioni non ammissibili, ossiano di soluzione *impossibile* in Trigonometria; e possono facilmente riscontrarsi nel I.° Capitolo della precitata *Memoria* le belle e istruttive *Tavole combinatorie* di Goudin, compilate da lui a sì fatto proposito. Quella incertezza però che contengono le due soluzioni, vien tolta o dai *dati* del Problema da scegliersi, o dalle *elementari* proprietà dei Triangoli relative alle concomitanti *specie* dei lati e degli angoli. E talvolta anche i *seni*, per dipendenza dai *dati*, importan unica soluzione; come sarebbe tra l' altre l' elegantissima Formula dell' area S di un Triangolo rettilineo, non dimostrata da Legendre

dre (34), e ch' io provo nel modo seguente. Perchè $S = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$. $\frac{\text{Sen.A Sen.B}}{\text{Sen.(A}-\text{B)}}$ è l'istessa cosa che $\frac{1}{2}(a+b)(a-b)\frac{\text{Sen.A Sen.B}}{\text{Sen.(A}-\text{B)}} = \frac{1}{2}\frac{(\text{Sen A}+\text{Sen.B})(\text{Sen.A}-\text{Sen.B})}{\text{Sen.(A}-\text{B)}}\,ab$ (Coroll. VII. del I. *Teorema*) $= \frac{1}{2}\,ab\,\frac{(\text{Sen.}^2\text{A}-\text{Sen.}^2\text{B})}{\text{Sen.(A}-\text{B)}} = \frac{1}{2}\,ab\,\frac{\left((1-\frac{1}{2}\text{Cos.2A})-(1-\frac{1}{2}\text{Cos.2B})\right)}{\text{Sen.(A}-\text{B)}}$

$= \frac{1}{2}\,ab\,\frac{\left(\frac{1}{2}\text{Cos 2A}-\frac{1}{2}\text{Cos.2B}\right)}{\text{Sen.(A}-\text{B)}} = \frac{1}{2}\,ab\,\frac{(\text{Sen (A}+\text{B) Sen.(A}-\text{B))}}{\text{Sen.(A}-\text{B)}} =$

$\frac{1}{2}\,ab.\text{Sen.(A}+\text{B)} = \frac{1}{2}\,ab.\text{Sen.}(180^\circ - (\text{A}+\text{B})) = \frac{1}{2}\,a\,b.\text{ Sen. C}$,

ch' è appunto la superficie *triangolare* derivata dalla conoscenza dei due lati e dell' angolo contenuto .

Corollario VIII.

Segue presso a poco l' istesso nella Formula celebratissima trigonometrica, mercè di cui, indipendentemente dalle Regole analoghe alle *Neperiane*, l' *analisi* d' un Triangolo rettilineo , mentre sian *conosciuti* due lati insieme coll' angolo contenuto , si conseguisce per via di Serie-infinite ; intorno all' origine e sviluppo delle quali si distinser cotanto o mediante l' Algebra de' *finiti* o con quella degli *infinitesimi* Legendre e Delambre, e più generalmente Lagrange , che primo ridusse ϕ (Sen.A , Cos.A) quando la Sigla ϕ rappresenti una *funzione razionale* qualunquesiasi, ad una Serie di *seni* d' archi multipli di A in progressione *naturale* aritmetica . Somministrasi immediatamente dagli *Elementi*, in virtù della normale M (Fig.ª 4.) , la Formula Tang $C = \frac{c\,\text{Sen.A}}{b - c\,\text{Cos.A}}$, la quale coincide , sott' altro aspetto , con $\frac{b}{\text{Sen.B}} = \frac{c}{\text{Sen.C}}$ (Coroll. VII.° del *Teorema* I.°), giacchè l'Equazione $\frac{\text{Sen.C}}{\text{Cos.C}} = \frac{c\,\text{Sen.(B}+\text{C)}}{b + c\,\text{Cos.(B}+\text{C)}}$, a motivo di $\text{A} = 180^\circ - (\text{B}+\text{C})$, si converte in

b.Sen.C

$b\text{Sen.C} + c\text{ Sen.C Cos.}(B+C) = c\text{ Cos. C Sen.}(B+C)$, cioè $b\text{Sen.C} = c(\text{Cos C Sen.}(B+C) - \text{Sen.C. Cos.}(B+C)) = c\text{ Sen.}((B+C)-C) = c\text{Sen.B}$; ma niuno ha fino ad ora provato ch' essa conduca alla medesima conclusione dell' allegata nel precedente *Corollario* VI.°, o sivvero $b + c : b - c :: \text{Tang.}\frac{B+C}{2} = \text{Cot.}\frac{A}{2} : \text{Tang.}\frac{B-C}{2}$ ch' è quanto dire $\text{Tang.}\frac{A}{2} = \frac{b-c}{b+c}\text{. Cot.}\frac{B-C}{2}$. Ciò tuttavia si dimostra colla massima facilità, ed è uno dei molti esempj d'espressioni analitiche di sembianza affatto diversa, avvenga che sostanzialmente le stesse. Perocchè $\text{Tang.C} = \text{Tang.}\left(\frac{(B+C)}{2} - \frac{(B-C)}{2}\right) =$

$$\frac{\left(1-\frac{(b-c)}{b+c}\right)\text{Tang.}\frac{(B+C)}{2}}{1+\frac{(b-c)}{b+c}\text{Tang.}^2\frac{(B+C)}{2}} = \frac{2c\text{.Sen.}\frac{(B+C)}{2}}{\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}} = \frac{2c\text{.Sen.}\frac{(B+C)}{2}\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}}{(b+c)\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}+(b-c)\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}}$$

$$\frac{2c\text{.Sen.}\frac{(B+C)}{2}\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}}{b\left(\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}+\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}\right)+c\left(\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}-\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}\right)} =$$

$$\frac{2c\text{.Sen.}\frac{(B+C)}{2}\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}}{b+c\left(\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}-\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}\right)} = \frac{c\text{Sen.}(B+C)}{b+c\text{Cos.}(B+C)} = \frac{c\text{Sen.A}}{b-c\text{Cos.A}}$$

, in conseguenza di $B + C + A = 180°$ (*Scolio* preced.); d' onde ricavasi un nuovo *nesso*, inosservato sino al presente dagli Analisti e senza dipendenza alcuna dai Triangoli *simili* (*Coroll.* V.°), tra la Geometria *elementare* ed i IV. Canoni *Neperiani*.

Scolio.

Quantunque volte piacesse dedurre il passato *Teorema* II.° e tutti i suoi *Corollarj* dal Triangolo piramidale equicrure col non

prendere a scorta l' *analogia* nè tampoco la dottrina dei *limiti*, potrebbe farsi ciò agevolmente, adattando il discorso geometrico allo sviluppo in piano dell' angolo solido al vertice della Piramide, disegnato da Legendre nella *Figura* 198 della *Tavola* IX. de' di lui divulgati *Elementi di Geometria*. Conciossiachè, se nel Quadrilatero, in A, C *birettangolo*, SAOC imagineremo da A condotta una normale sopra SC, ed altra sopra CO, si vedrà subito colla *definizione* sola dei *seni* ec., che $SC = SA.\,Cos.\,CSA + AO.\,Sen.\,CSA$, onde $\frac{AO}{AE'} = Cos.\,C = \frac{SC - SA.Cos.CSA}{AE'.\,Sen.CSA} = \frac{\frac{SC}{BS''} - \frac{SA}{SE'}.Cos.CSA}{\frac{AE'}{SE'}\,Sen.CSA}$

$= \frac{Cos.CSB' - Cos.ASB'Cos.CSA}{Sen.ASB'.Sen.CSA} = \frac{Cos.c - Cos.a Cos.b}{Sen.a Sen.b}$; e tale è appunto la seconda Formula o Equazione *cattolica* riportata nel *Corollario* I.° prossimo antecedente, *simetrica* rapporto agli angoli a, b, ed oltrediciò complessiva e chiave unica di tutta la Trigonometria, sebben quì riprodotta da un Principio sì facile e luminoso, com' è quello della linea retta SC eguale insieme alle due di lei parti *integranti*.

Erano di già cognite (ed ognuno se lo rammenta) ai Geometri dell' antichità più rimota entrambe le affezioni di qualunquesiasi Triangolo rettilineo, che consistono nell' incontrarsi in un punto comune (centro del Circolo inscritto nel 1.° caso e di *gravità* nel secondo) le tre rette partite dai vertici degli angoli e dividenti per metà i tre angoli medesimi del Triangolo, come altresì le tre dividenti nel mezzo i suoi lati opposti. Altrove ho provato *sinteticamente*(35) (con assai maggior brevità e senz'ajuto di Triangoli *simili* o proporzioni, conforme taluni avean fatto (36)) che concorrono ancora in un punto medesimo le tre rette condotte perpendicolarmente dalle cime degli angoli su i lati opposti; intorno alle quali rimane sin qui mancante di prova diretta il bel *Teorema* datoci da Carnot (37), della *somma* cioè delle tre rette, che dall' ultimo punto vadano agli apici di tutti gli angoli, eguale alla *somma* dei due *diametri* del Circolo inscritto

e

e circoscritto al Triangolo. Ma gettando l'occhio sulla Figura 5.ª e rammemorandosi le più ovvie Proposizioni della Geometria *elementare*, abbiamo in primo luogo da queste che le tre perpendicolari intere AL, BN, CM sono tra loro nella ragione inversa dei lati BC, CA, AB, ai quali appartengono; come pure eguali infra loro i tre rettangoli AD. DL, BD.DN, CD. DM; quelli di ciascheduno *binario* intorno agli angoli BA.AM, CA.AN, ec., e perciò i *seguenti* AM, AN in ragion reciproca dei lati cui spettano; eguali gli angoli ABN, ACM delle perpendicolari coi lati, ec., ec. (verità tutte evidenti, sebbene da niuno affacciate, che derivan dall' area triangolare e dagli angoli retti in L, N, M immediatamente); ed abbiamo oltrecciò la verificazione facile del *Teorema* allor quando il Triangolo fosse equilatero, ed il punto di concorso D centro comune di grandezza e dell' inscritta e circoscritta concentrica circolare Circonferenza, stante che in sì fatto particolare DA+DC = *diametro* del Circolo circoscritto, e DB=2DL = *diametro* del Circolo inscritto. Di pari accade nell' ortogonio equicrure, ov' eccentriche sono, come in tutti gli altri Triangoli fuori dell'equilatero, l'inscritta e circoscritta Periferìa, e le *tre* distanze riduconsi a *due* (poichè la terza AD s' annichila in A): infatti sappiamo dagli *Elementi* che diviso per metà l' angolo ABC mediante BO, la quale incontri l'altezza AS in O, e da questo punto condotta OT normale ad AB, si ha BA= BT+TA=BT+TO=SB+OS, cioè BA + AC (che son le due sole distanze residue BM, CN) = 2SB + 2OS, ossia alla *somma* dei due preaccennati *diametri*. Più di lontano si stacca la dimostrazione del *Teorema* medesimo per tutti i Triangoli in genere, colla diversità procedente dalla nota *correlazione* delle *Figure* tra gli ortogonj ed ambligonj, mentre negli ultimi la *somma* delle tre rette indicate, a motivo dei *negativi*, cangiasi in *differenza* fra la *somma* di due e la restante, come disposta in direzione contraria rispetto a quella degli acutangoli. Le tre normali suddividono il Triangolo BAC in tre Quadrilateri *birettangoli*. Uno di questi AMDN ha per lati intorno all'angolo A i due *segmenti* AM, AN, cioè, *b* Cos. A, *c* Cos. A; laonde, in virtù d' una Proposizione *elementare* (38), la diagonale

$AD = \sqrt{\frac{b^2\text{Cos.}^2A + c^2\text{Cos.}^2A - 2bc\text{Cos.}^3A}{\text{Sen.}A}} = \frac{\text{Cos.}A}{\text{Sen.}A}\sqrt{b^2+c^2-2bc\,\text{Cos.}A}$

$= \frac{a}{\text{Sen.}A} \cdot \text{Cos.}\,A$ (oppure a Cot.A), per gli *elementi* geometrici (39). Dunque valendo l' istesso discorso in rapporto agli altri due Quadrilateri BMDL, CNDL, ricavasi $DA + DB + DC = \frac{a}{\text{Sen.}A}.\text{Cos.}A + \frac{b}{\text{Sen.}A}.\text{Cos.}B + \frac{c}{\text{Sen.}C}.\text{Cos.}C$, ovvero (Coroll. VII.° del *Teorema* I.°) $\frac{a}{\text{Sen.}A}(\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C)$, ossia (*Scolio* del I.° Teor.°), posto R il *raggio* del Circolo circoscritto al Triangolo, $2R(\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C)$: Formula elegantissima e nuova da aggiungersi alle già conosciute trigonometriche. Ora (40) $\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C = \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

$= \frac{ba^2+bc^2-b^3+ab^2+ac^2-a^3+ca^2+cb^2-c^3}{2abc} = \frac{2abc+(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}$

$= 1 + \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc} = 1 + \frac{r}{R}$, segnando r il *raggio* del Circolo inscritto (41). Quindi è che $DA+DB+DC = 2R\left(1+\frac{r}{R}\right)$ $= 2R+2r$, quanto appunto mi proponeva mostrare; e si conseguisce di più per ogni Triangolo rettilineo (salvo i *segni*) il preclaro *Teorema* non avvertito che „ Il *raggio* del Circolo inscritto al „ *raggio* dell' inscritto sta sempre come il *seno-tutto* alla *differenza* tra la *somma* de' *coseni* dei suoi tre angoli ed il medesimo *seno-tutto*. „

Giova adesso d' aggiungere l' illustrazione di quella Formula celebre che determina l' area Σ di qualunque Triangolo sferico, conoscendone due lati a, b, e l'angolo C dai medesimi contenuto; poichè per mezzo di lei si deducon di nuovo colla massima facilità fecondissimi risultati d' *analogia* manifesta tra i Triangoli sferici e rettilinei. Dessa Formula, ben diversa dall'altra accennata nello *Scolio* del I.° Teorema, è così concepita $\text{Cot.}\frac{1}{2}\Sigma = \frac{\text{Cot.}\frac{1}{2}a.\text{Cot.}\frac{1}{2}b+\text{Cos.}C}{\text{Sen.}C}$. Spicca ancor quivi con tutto

ciò

ciò luminosamente il *limite* della Formula trasportata a rappresentare la superficie del Triangolo sferico *infinitesimo*, cioè (per lo *Scolio* pred.°) del Triangolo *simile* rettilineo *finito;* essendo che allora $\text{Cos.}\frac{\Sigma}{2} = \text{Cos.}\frac{1}{2}a.\ \text{Cos.}\frac{1}{2}b + \frac{\text{Cos.C}}{\text{Sen.C}}$ si muta nell'espressione $\frac{1}{2}M\frac{\frac{1}{2}a\,\frac{1}{2}b}{\text{Sen.C}} = \text{Cos. C} = \frac{1}{\frac{ab}{4}}\cdot\text{Sen. C}$ (in virtù di a, b *evanescenti*); ed è quanto dire $\Sigma = \frac{ab}{2}\cdot\text{Sen.C}$, come insegnano gli *Elementi,* e s'è già visto nel Corollario VII. antecedente. Nè havvi discrepanza veruna tra la detta Formula universale e l'altra dimostrata da Lagrange con tutta chiarezza

$$\text{Tang.}\frac{\Sigma}{2} = 2\sqrt{\frac{\text{Sen.}\frac{(a+b+c)}{2}\text{Sen.}\frac{(a-b+c)}{2}\text{Sen.}\frac{(a+b-c)}{2}\text{Sen.}\frac{(-a+b+c)}{2}}{1+\text{Cos.}a+\text{Cos.}b+\text{Cos.}c}}.$$

imperciocchè facilmente si prova mediante il calcolo di Legendre (42) che rovesciando la prima e cambiandola in $\frac{1}{\text{Cot.}\frac{1}{2}\Sigma} = \text{Tang.}\frac{1}{2}\Sigma$, procede l'ultima puntualmente, e con mirabile accordo quelle due *frasi* analitiche appariscono ad evidenza, come non di rado intravviene, equipollenti o *sinonime*.

TEOREMA III.

Si vuol dimostrare che tutta la Trigonometria (posto il *raggio* $= 1$) concentrasi in un' Equazione *trinomia* semplicissima di questa *forma* $\text{Cos.}z \pm g\,\text{Sen.}z \mp h = 0$, e che siffatta Equazione, non meno che il di lei scioglimento hanno per loro propria ed intima etiologìa l' *Ellissi* conica o Apolloniana.

A senso dello *Scolio* antecedente l' Equazione *unica* tra IV. *elementi*, dalla quale tutto il resto dipende, è $\text{Cos}\,c = \text{Cos.}a\ \text{Cos.}b + \text{Cos.C Sen.}a\ \text{Sen.}b$. Ma se facciasi $b = z$ (direi l'istesso di a), quel-

quella diventa $\text{Cos.}z + \frac{\text{Cos.C Sen.}a}{\text{Cos.}a}.\text{Sen.}z - \frac{\text{Cos}\,c}{\text{Cos.}a} = 0$, ossia, quando $c < a$, trovato con una prima *analogia* trasportabile in *logaritmica* $\text{Cos.}\beta = \frac{\text{Cos.}c}{\text{Cos.}a}$, e per mezzo d' una seconda consimile Cos.C.Tang.a=Tang. k, ovvero, mentre $c > a$, trovata $\text{Sec.}\beta = \frac{\text{Cos.}c}{\text{Cos.}a}$, si conseguisce tosto la ridotta $\text{Cos.}z + \text{Tang.})\,\frac{k}{k}'\,\text{Sen.}z - \frac{\text{Cos.}}{\text{Sec.}})\,\beta = 0$. Varrebbe lo stesso il rispetto all'altra Equazione *supplementare* ch'è *replica* della prima, Cos.C = −Cos.A Cos.B + Cos.c Sen.A Sen.B (Corollario I.° del *Teorema* II.°), solo che si facessero, come sopra, B=z, e l'Equazioni *sussidiarie* $\frac{\text{Cos.C}}{\text{Cos.A}} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Sec.}})\,\beta$, Cos. c. Tang.A = Tang. k, onde convertirla in $\text{Cos.}z - \text{Tang.})\,\frac{k}{k}'\,\text{Sen.}z + \frac{\text{Cos.}}{\text{Sec.}})\,\beta = 0$. Nè meno agevole è il modo di trasmutare la III., cioè Cot.b Sen.a = Cot.B Sen.C + Cos.a Cos.C : perchè posto C = z, e fatta Cot. b Tang.$a = \frac{\text{Cos.}}{\text{Sec.}})\,\beta$, $\frac{\text{Cot.B}}{\text{Cos.}z} = \text{Tang.}k$, s' ottiene $\text{Cos.}z + \text{Tang.})\,\frac{k}{k}'\,\text{Sen.}z - \frac{\text{Cos.}}{\text{Sec.}})\beta = 0$, coincidente rapporto ai *segni* con quella esposta in principio. E quando nell' ultima si nominasse $a = z$, egli è manifesto egualmente che mediante le due Formule *ausiliari* $\frac{\text{Cot.}b}{\text{Cos.C}} = \text{Tang.}k$, Cot.B Tang.C = $\frac{\text{Cos.}}{\text{Sec.}})\,\beta$, nascerebbe $\text{Cos.}z - \text{Tang.})\,\frac{k}{k}'\,\text{Sen.}z + \frac{\text{Cos.}}{\text{Sec.}})\,\beta = 0$, analoga quanto ai *segni* all' Equazione seconda. Ora, mercè le cose premesse, queste IV. Equazioni sono, 1.° unica per la *forma*; 2.° due per la combinazione dei *segni*; 3.° quattro guardando, oltr' i *segni*, al valore dell' ultimo *termine*, se *coseno* o *secante*, cioè se minore o maggiore dell'*unità* o *raggio* trigonometrico; 4.° finalmente hanno tutte per *limite* il *caso* di $\beta = 90°$, cioè del terzo *termine* = 1, ossia (*Corollario* II.° seg.) de' Triangoli equicruri o isoscèli.

Ecco dunque l' Equazioni predette riconcentrate, cui tutta riducesi (secondo Goudin) la sferica Trigonometria.

I.°

I.ª Cos.z + Tang.k Sen.z — Cos.β = o
II.ª Cos.z + Tang.k' Sen.z — Sec β = o
III.ª Cos.z — Tang.k Sen.z + Cos.β = o
IV.ª Cos.z — Tang.k' Sen.z + Sec.β = o

Dimostriamole adesso (ciò che non ha fatto l'Autor Francese) insieme colle lor *sussidiarie* inerenti alla *locale* proprietà dell'Ellissi riportata ad entrambi i suoi *fochi* ed alle laterali *tangenti*, e proviamone oltrediciò dipendente la soluzione dagli angoli o archi correspettivi della circonferenza del Circolo *eccentrico* o circoscritto, come nel famoso *Problema* di Kepler. E non potrebbe mai essere diversamente subito che tanto i piani in cui sono le rette EP, EO, ed EI, EO considerate nel *Teorema* I.°, quanto gli stessi delle rette combinate OP, PE, ed OI, IE, d'onde nacque il *Teorema* II.°, vengono ad essere inclinati rapporto al pian della base, e perciò genererebbero Ellissi tagliando il Cono circoscritto al Triangolo piramidale equicrure, quando questo fosse ancora *rettangolo* (posto che cadesse O in F o G), mentre all' incontro trasformatosi quel Triangolo piramidale in Prisma retto, e lo sferico in rettilineo, l'Ellissi *conica* diventerebbe Circolo circoscritto all'istesso Triangolo rettilineo, *limite* delli sferici, tutto allora giacente in un piano; e da tal connessione del Circolo col Triangolo rettilineo sogliono ricavarsi i metodi ordinarj per dimostrare l' *analisi* dei rettilinei Triangoli d'ogni maniera.

Sia dunque (Fig.ª 6.) la Semiellissi conico-cilindrica BKGF circoscritta dalla circolare Semicirconferenza generatrice BHF, e sul perimetro della prima preso a piacimento qualunque punto K, e condotta la tangente della Curva IKL, che incontri in A il protratto *asse* trasverso o maggiore FB, nel quale vengan segnati i due *fochi* C, E onde abbiasi l' *eccentricità* intera (che Goudin chiama *mezza*) CD = DE = Cos.β riportata a DB = CG = DH = GE = DF = DL = DI (per la costruzione e gli *Elementi conici*) = 1 *raggio* trigonometrico, e perciò il *semiasse* conjugato o minore DG = Sen.β, l'angolo GCD = GED = β, mentre i due raggi *vettori* sono CK, EK, l' uno e l' altr' angolo KCF, KEF = z (valor *duplice*) l' angolo FAI = k, l' angolo CKA = EKI = k',

co-

come i loro *supplementi*, in virtù delle *Coniche*, insegnano le medesime esser CL, EI perpendicolari alla tangente IKLA, esser DL paralella al raggio *vettore* EK, siccome DI a CK, e per conseguenza KCF $= z =$ IDF, KEF $= z' =$ LDF, CKE $= z' - z =$ IDL, e finalmente, menate KV normale all' Ellissi e DPT alla tangente, $\frac{z'-z}{2} =$ CKV $=$ EKV $=$ LDP $=$ IDP, conforme rilevasi dagli *Elementi* testè rammentati.

Costruita così la *Figura*, immediatamente ne nascono VII. *Equazioni* speciali.

Diffatti condotte all'*asse* maggiore le perpendicolari IQ, LS, e tenute ferme le denominazioni di sopra, ognun vede che stante Tang.$k = \frac{\text{DB.CL}}{\text{AL}} = \frac{\text{DB.EI}}{\text{AI}}$, Sen.$z =$ IQ $=$ LS, Cos.$z =$ DQ $=$ DS (senz' attendere per ora al *segno* sottintesovi (43)), proceda

$$\text{Cos.}z + \text{Tan.}k\ \text{Sen.}z = \text{DB}\begin{cases}\text{DQ} + \frac{\text{EI}}{\text{AI}}\cdot\text{IQ}\\ \text{DS} + \frac{\text{CL}}{\text{AL}}\cdot\text{LS}\end{cases} = \text{DB}\begin{cases}\text{DQ}+\text{QE}\\ \text{DS}+\text{CS}\end{cases}$$, per causa dei Triangoli, AIE, ALC entrambi ortogonj, ch'è quanto scrivere Cos.z + Tang.k Sen.$z = \begin{cases}\text{Cos.}z+\text{Cos.}z+\text{Cos.}\beta\\ \text{Cos.}z+\text{Cos.}z-\text{Cos.}\beta\end{cases}$, cioè

I.ª Cos.z — Tang.k Sen.z + Cos.$\beta = 0$, ossia prendendo col suo vero *segno* del *coseno* (sin quì contemplato nel *supplemento* angolare di z) l'angolo z.

Cos.z + Tang.k Sen.z — Cos.$\beta = 0$; e passando nell' una e nell' altra al *supplemento* di k,

Cos.z + Tang.k Sen.z + Cos.$\beta = 0$

Cos.z — Tang.k Sen.z — Cos.$\beta = 0$; le quali due ultime *Equazioni* (accennate e non scritte da Goudin (44)) altro non sono in sostanza fuorchè la *replica* delle due prime.

Ma quando in vece dell' angolo k sostituiscasi k' nell' Equazioni di già stabilite, cioè si surroghi all'angolo della *tangente* col maggior *asse* quello della medesima col raggio *vettore*, la figura ed indole dei Triangoli mostrano $k = z - k'$. Quindi n' avviene (operando sulla seconda Formula, perchè s'è pocanzi veduto esse-

ser ella la *matrice* di tutte) $\text{Cos}\,z + \text{Tang.}\,(z - k')\,\text{Sen.}z - \text{Cos.}\beta = 0$, ovvero $\text{Cos.}z + \left(\frac{\text{Tang.}z - \text{Tang.}k'}{1 + \text{Tang.}z\,\text{Tang.}k'}\right)\text{Sen.}z - \text{Cos.}\beta = 0$, cioè $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z - \text{Tang.}k'\text{Sen.}z + \frac{\text{Sen.}^2z}{\text{Cos.}z} - \text{Cos.}\beta - \text{Tang.}k'\frac{\text{Sen.}z}{\text{Cos.}z}.\text{Cos.}\beta = 0$, ch' è quanto scrivere $\text{Cos.}^2z + \text{Sen.}^2z - (\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z)\,\text{Cos.}\beta = 0$, ossia $1 - (\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\text{Sen.}z)\,\text{Cos.}\beta = 0$, e finalmente $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\text{Sen.}z - \frac{1}{\text{Cos.}\beta} = 0$, d' onde derivano la

II.ª $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\text{Sen.}z - \text{Sec.}\beta = 0$, e le conseguenti o *identifiche* pe' i *supplementi* di z, k'

$$\text{Cos.}z - \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z + \text{Sec.}\beta = 0$$
$$\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z + \text{Sec.}\beta = 0$$
$$\text{Cos.}z - \text{Tang.}k'\,\text{Sen}\,z - \text{Sec.}\beta = 0.$$

È ancora più agevole la prova delle *binomie-ausiliari*, computabili per *logaritmi*. Imperciocchè $\text{Cos.}k : \text{Cos}k' :: \frac{AI}{AE} : \frac{IP}{ID} :: ID = GE : \frac{AE.IP}{AI} = DE :: 1 : \text{Cos.}\beta$; laonde

III.ª $\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}k - \text{Cos.}k' = 0$.

Di più. introducendo l'arco o angolo φ dell' *Eccentrico* astronomico-Kepleriano, cioè BDR, abbiamo $\text{Sen.}k : \text{Sen}\,k' :: DI : DA$ (Coroll. VII.° del I.° *Teorema*) : : DB : DA : : DO : DB (per le *Coniche*) : : $\text{Cos.}\varphi : 1$; e quindi

IV.ª $\text{Sen.}k'\,\text{Cos.}\varphi - \text{Sen.}k = 0$.

Oltrediciò dagli *Elementi conici* si deduce essere $1^2 : \text{Tang.}^2\beta :: CD^2 = HD^2 - DG^2 : DG^2 :: RO^2 - OK^2 = LK.KI\,(45) : OK^2 :: \frac{LK}{LG}.\frac{KI}{IE} : \frac{OK^2}{DG^2} : : \text{Cot.}^2k' : \frac{RO^2}{DH^2} = \text{Sen.}^2\varphi$; e per risultanza la

V.ª $\text{Tang.}\beta\,\text{Cot.}k' - \text{Sen.}\varphi = 0$.

Segue coll'istessa facilità l' altra Proporzione *geometrica* $\text{Cot.}^2k : \text{Tang.}^2\varphi :: \frac{AI}{IE}.\frac{AL}{LG} : \frac{RO^2}{DO^2} = \frac{RA^2}{DR^2}$ (poichè RA è *tangen-*

te del Circolo) : : $\frac{FA.AB}{DG^2} : \frac{RA^2}{DB^2} : : \frac{RA^2}{DG^2} : \frac{RA^2}{DB^2} : : DB^2 : DG^2 : : 1^2 :$ Sen.$^2\beta$ (mercè delle *Coniche* e della *Proposizione* XXXVI. del Libro III.° d' *Euclide*); d' onde proviene

VI.ª Cot.k Sen.β — Tang.$\phi = 0$.

Ed in ultimo luogo riceve origine dalla dottrina medesima dell'Ovale comune l'Equazione *binomia* resolutiva dell'Equazioni I.ª e II.ª, ossia il valor *duplice* dell'arco o angolo incognito z: perocchè riferita all'uno od all'altro *foco* la Curva, havvi tra i raggi *vettori* e le *funzioni* degli angoli al *foco* predetti la relazione già ovvia presso degli *elementari* Analisti (46) $\begin{pmatrix} CG(EK+EO)=EB.FO \\ CG(CK+CO)=CF.BO \end{pmatrix}$, dalla quale deriva $\left(\frac{CG.KO}{CG(EK+EO)} = \frac{CG}{EB} \cdot \frac{KO}{FO} = \frac{DG}{EB} \cdot \frac{RO}{FO}\right)$. Ora $\left(\frac{CG.KO}{CG(CK+CO)} = \frac{CG}{CF} \cdot \frac{KO}{BO} = \frac{DG}{CF} \cdot \frac{RO}{BO}\right)$

(non attendendo ai *segni*) Tang.$z' = \frac{KO}{EO}$, Tang.$z = \frac{KO}{CO}$, e per conseguente (47) Tang.$\frac{1}{2}z' = \frac{KO}{EK+EO}$, Tang.$\frac{1}{2}z = \frac{KO}{CK+CO}$, Tang.$\beta = \frac{DG}{CD}$, Tang.$\frac{1}{2}\beta = \frac{DG}{CG+CD} = \frac{DG}{FC} = \frac{DG}{EB}$, Tang.$\Phi = \frac{RO}{OD}$, Tang.$\frac{1}{2}\Phi = \frac{RO}{RD+OD} = \frac{RO}{FO}$, oltre EB.CB=FC.CB=DG^2=Sen.$^2\beta$: laondeTang $\frac{1}{2}z'$ = Tang.$\frac{1}{2}\beta \times$ Tang $\frac{1}{2}\Phi$, Tang.$\frac{1}{2}z = \frac{DG}{CF} \cdot \frac{RO}{EO} = \frac{DG}{EB} \cdot \frac{FO}{RO}$ (48) = Tang.$\frac{1}{2}\beta \times$ Cot.$\frac{1}{2}\Phi$; e perciò in generale

VII.ª Tang.$\frac{1}{2}z$ — Tang.$\frac{1}{2}\beta \begin{pmatrix} \text{Tang.} \\ \text{Cot.} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\Phi = 0$.

Lo scioglimento pertanto dell' Equazione *cattolica* trigonometrica nell' una e nell' altra *forma*

$$\text{Cos.}z + \begin{pmatrix} \text{Tang.}k \\ \text{Tang.}k' \end{pmatrix} \text{Sen.}z - \begin{pmatrix} \text{Cos.}\beta \\ \text{Sec.}\beta \end{pmatrix} = 0$$

si conseguisce subito coll' artificio della doppia *ausiliare* $\begin{pmatrix} V.ª \\ VI.ª \end{pmatrix}$ e VII.ª, adattatissime all' uso delle *Tavole dei logaritmi* o Neperia-

no-

no-iperboliche o Briggiano-iperboliche, $\text{Tan.})_{\Phi} = \frac{\text{Cot.}k \text{ Sen. } \beta}{\text{Cot } k' \text{ Tang.}\beta}$ |

$\text{Tang.}\frac{1}{2}z = \text{Tang.}\frac{1}{2}\beta \left(\begin{matrix}\text{Tang.}\\ \text{Cot.}\end{matrix}\right)\frac{1}{2}\Phi$; dove son manifesti in ciascheduna delle due *forme* i due valori diversi di z, ossiano le due *radici* d' ognuna delle divisate *Equazioni*.

COROLLARIO I.

Se in vece di $KEF = z'$ pongasi il suo *supplemento* KEB (lo che è l' istesso, indipendentemente dai *segni*, pel valore *assoluto* delle *funzioni* circolari delle *radici*) n' avviene $KCF = z = AKC + KAC = k' + k$, e $z' = IKE - KAE = k' - k$, onde $\frac{z+z'}{2} = k'$, $\frac{z-z}{2} = k$: nuovo metodo di ricerca dei due valori distinti dell' *incognita* nella I.ª Equazione o nella II.ª senza l' *eccentrico* Φ, ma mediante il *nesso* somministrato dalla III.ª Equazione. La familiar conoscenza della Curva *ellittica* non lascia dubbio sulla corrispondenza d' un valor *unico* sì di k, come di k' ai *due* di z; nè manca tampoco di suggerire 1.° che la III.ª preaccennata Equazione $\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos.}k\,\text{Cos.}k'$ assume la *forma* di $\text{Cos.}\beta = \text{Cos.}k = \text{Cos.}(z - k)$, ovvero di $\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}(z-k') = \text{Cos.}k'$, d'onde procedono le dipendenze scambievoli delle IV. *funzioni* indicate e vicendevolmente connesse e determinabili; 2.° che la V.ª e VI.ª Equazioni trasformansi in $\text{Cot.}\left(\frac{z+z'}{2}\right) = \frac{\text{Sen.}\,\phi}{\text{Tang.}\beta}$, $\text{Cot.}\left(\frac{z-z'}{2}\right) = \frac{\text{Tang}\,\phi}{\text{Sen.}\beta}$, e vale a dire $\text{Cot.}\left(\frac{z+z'}{2}\right) : \text{Cot.}\left(\frac{z-z}{2}\right) :: \text{Sen.}\,\beta\,\text{Sen.}\,\Phi : \text{Tang.}\,\beta\,\text{Tang.}\,\Phi :: \text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\Phi : 1^2$; 3.° che nella I.ª Equazione *cattolica* l' arco o angolo k, la cui *funzione* è *coefficiente* del secondo *termine*, pareggia sempre la *semidifferenza* delle due *radici*, e k' viceversa la *semisomma* nel *coefficiente* del secondo *termine* della II.ª Equazione.

COROLLARIO II.

Mentre la I.ª Equazione Cos.z+Tang.k Sen.z — Cos $\beta = 0$ a motivo di $\beta = 0$, s' appresentasse nella seguente maniera Cos.z + Tang.k Sen.$z = 1$, e perciò combinasse colla II.ª, perchè allora anco Sec $\beta = 1$, onde acquistassero entrambe la *forma* $\text{Tang.}\begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix} = \frac{1-\text{Cos.}z}{\text{Sen.}z} = \text{Cosec.}z - \text{Cot.}z = \text{Tang.}\frac{1}{2}z$, ed in conseguenza $k = k' = \frac{z}{2}$, cioè $z' = 0$, sì fatto *limite*, nel quale concorrono e s'immedesimano le due Equazioni *cattoliche*, e non ammettono fuor d' una sola *radice*, svanendo l'altra, coincide per la costruzione di quella col mutamento dell'Ellissi *scalena* in Parabola Apolloniana. Allora difatti DG = Sen β s' annulla in paragone di DB = 1; rimane un sol *foco* C, e l'altro a cagione dell' immensa *eccentricità* si perde nell'infinito; uno degli angoli d' un raggio *vettore* coll' asse, cui è paralello, viene ad essere *infinitesimo*, e l'altro diventa sempre doppio dell' angolo formato dalla *tangente* coll'*asse* e dal secondo raggio *vettore* colla *tangente* medesima o dal primo con essa, come apparasi dalle *Coniche*. Quest' affinità trigonometrica della Parabola, un dei *limiti* dell' Ellissi il qual fraternizza colla Linea retta ov' egualmente Sen.β = 0, Cos.$\beta = 1$, si verifica tutte le volte che nella Trigonometria Sferica accade il particolare della soluzione od *analisi* d' un Triangolo equicrure o *isoscèle* (divisibile in due ortogonj identifici, o parte integrante d'uno spicchio (*fuseau*) sferico intero insieme con altro equicrure) conforme rilevasi dai preliminari del *Teorema* poco innanzi provato $\frac{\text{Cos.}c}{\text{Cos.}a} = 1$, $\frac{\text{Cos.C}}{\text{Cos.A}} = 1$, Cot.$b$ Tang.$a = \frac{\text{Tang.}a}{\text{Tang.}b} = 1$, Cot.B Tang.C $= \frac{\text{Tang.C}}{\text{Tang.B}} = 1$, stando gli *scaleni* racchiusi entro della Formula generale.

CO-

COROLLARIO III.

Altro *limite* della serie-infinita dell' Ellissi *scalene*, o medio termine tra le *allungate* e le *compresse*, è anche il Circolo o Ellissi *equilatera*. Questo avviene allor quando i due *fochi* si confondono in uno col *centro*; si soprappongono i due raggi *vettori* ed i due angoli eguali z, z'; diventano Cos β ossia l' *eccentricità* $= 0$, Sen.$\beta = 1$, Sec.$\beta = \infty$; e la prima Equazione *cattolica* prende la semplicissima *forma binomia* di Cos.z + Tang.k Sen.$z = 0$, cioè — Tang.z = Cot.k, ossia — Tang (RDF) = Tang. (RDA) = Cot (RAD); lo che vuole apertamente significare DRA angolo retto, siccome abbiamo dagli *Elementi*. A tale accidente conduce o il Triangolo sferico che sia rettangolo, o quello ch' abbia un de' suoi lati eguale al *quadrante* (il quale si scioglie in simil maniera, avendo per *supplementare* o *polare* un rettangolo): ed è veramente mirabile, oltre al *criterio* che così se n' acquista, la connessione *grafica* dei Triangoli rettangoli sferici (e loro dipendenti *quadrantali*, *isoscèli*, o che avesser la *somma* di due lati eguale alla *semicirconferenza* d' un Circolo, o di due angoli pari a due *retti*) co' i rettangoli rettilinei, non meno che la concordia delle ultime Formule colle da prima mostrate. Conciossiachè essendo in questo caso $c = 90°$, e Tang.k = Tang.a Cos.C, per le denominazioni assunte in principio del passato *Teorema*, avremo — Tang.z = — Tang.b = $\frac{1}{\text{Tang.}a\text{Cos.C}}$; ovvero--Cos.C=Cot.$a$. Cot b, cioè, nel Triangolo *polare* rettangolo, — Cos.$(180° - c)$ = Cot.$(180° - A)$ Cot.$(180° - B)$, ch' è come dire Cos.c = Cot.A. Cot.B, conforme porta il Num.° 4.° del *Corollario* IV.° del II.° *Teorema*. Parimente accade rispetto alla III.ª Equazione Cos.z— Tang.k Sen.$z = 0$, (Tang (RDA) = Cot.(RAD)), dove, stante z = B, e Tang.k = Cos. c.Tang.A, e C angolo *retto*, abbiamo Tang.B = $\frac{1}{\text{Cos.}c\,\text{Tang.A}}$, vale a dire Cos.$c$ = Cot.B Cot.A, come sopra, e come debb'essere in un Triangolo immediatamente ortogo-

gonio. Riconduce altresì alle di già ritrovate espressioni analitiche anco la seconda ipotesi relativa alla 1.ª Equazione, e sempre appoggiata, come tutte l'altre, al Triangolo rettilineo ortogonio DRA; perocchè Cos.z + Tang.k Sen.z = o in questa supposizione, che stabilisce z = C, Tang.$k = \frac{\text{Cot.B}}{\text{Cos.}a}$, Cot.$b$.Tang.$a$ = o = $\frac{\text{Tang.}a}{\text{Tang.}b}$, cioè b = 90°, reca il *caso* d'un altro Triangolo sferico ad un tempo avente per lato un *quadrante*, e lo abbraccia col mezzo di —Tang.C = Cos. a.Tang.B, ossia — Cos.$a = \frac{\text{Tang.C}}{\text{Tang.B}}$ = Cot.B.Tang.C, siccome conformemente deducesi dall' Equazione III.ª del *Corollario* 1.° del II.° *Teorema* (ove Cot.b = Cot.(90°) = o), e dal Triangolo *polare* corrispondente. In ultimo, mentre pongasi z = a, Cot.B.Tang.C = o, cioè B = 90°, Tang.$k = \frac{\text{Cot}\,b}{\text{Cos.C}}$, proviene rispetto a sì fatto Triangolo sferico ed ortogonio l' Equazione *binomia* $\frac{\text{Cos.}a}{\text{Sen.}a}$ = Cot.$a = \frac{\text{Cot.}b}{\text{Cos.C}}$, concordante appieno colla 1.ª del *Corollario* IV.° del divisato Teorema. Quanto poi all' altra ipotesi di Sec.$\beta = \infty$, cioè, nelle IV. soppresse Equazioni, di $\frac{\text{Cos.}c}{\text{Cos.}a} = \infty$, $\frac{\text{Cos C}}{\text{Cos.A}} = \infty$, Cot.$b$.Tang $a = \infty$, Cot B.Tang.C = ∞, che torna a scrivere a = 90°, A = 90°, a = 90°, C = 90°, dessa non fa che ripetere sopra a,A la 1.ª e 2.ª delle passate *combinazioni* sopra c, C, la 3.ª sopr' a in vece di b, e la 4.ª su C in cambio di B, e ciò sempre a proposito de' soliti Triangoli sferici *rettangoli* o *quadrantali*. Procedono facilmente dall'Equazioni *cattoliche* nei detti casi Tang.$k' = \infty$, e vale a dire k' = 90° = DRA angolo-retto (il che richiama all' istesso Triangolo rettilineo rettangolo), ovvero Tang.$z = \infty$, ossia z = 90° e k = o (ch' è il *limite* del rammentato ortogonio Triangolo rettilineo). Nella prima supposizione Tang.k' = Cos.C.Tang.a racchiude l'istessa ipotesi di a = 90°, come Tang.k' = Cos.c.Tang.A

som-

somministra A = ad un angolo *retto*, Tang.$k' = \frac{\text{Cot.B}}{\text{Cos.}a}$ dà $a = 90°$, e finalmente Tang.$k' = \frac{\text{Cot.}b}{\text{Cos.C}}$ suggerisce C = ad un angolo *retto*: tutto in corrispondenza precisa alle di già fatte preparazioni ipotetiche. E nell' altra supposizione avverrebbe $b = 90°$, B = 90°, $a = 90°$, C = 90°; la quale combinata insiem colla prima reca i Triangoli sferici *birettangoli* o *biquadrantali*, di cui sono un *caso* particolare i *trirettangoli*, o *triquadrantali*, ottava parte di tutta la Sferica superficie o quarta di quella dell' Emisfero.

COROLLARIO IV.

Ma, per compimento di questo *Saggio di Trigonometria Sferico-conica*, quali nascose combinazioni e rapporti colla teoria dei Triangoli averebbe mai il cambiamento dell' Ellissi in Iperbola, dopo esauriti già quelli del Circolo e della Parabola? Ognuno conosce la metamorfosi dell'Ellissi in Iperbola, e sa l' intima cognazione che passa tra queste due Curve congeneri. Prima assai di Carnot, colla guida dell' unica relazione *immaginaria* $\sqrt{+1} : \sqrt{-1}$ (cioè del trasmutamento o passaggio dalla Trigonometria *circolare* all' *iperbolica*, ossia della *variazione* di Cos.$^2\beta = 1 - \text{Sen.}^2\beta$ in Cos.$^2\beta = 1 - (\text{Sen.}\beta\sqrt{-1})^2 = 1 + \text{Sen.}^2\beta$) assegnai la maniera di trasportare l' espressioni *integrali* Euleriane degli *archi* d'un' Ellissi agli *omologhi* dell' Iperbola (49); ed ora manca sol di provare nell' unione o *sistema* di questa ultima Curva ad *assi* eguali col Circolo la proprietà elegantissima (Fig.ª 7.) consistente nell' esser tale e sì stretta la connessione tra l' Ellissi e l' Iperbola entrambe *equilatera*, che condotta qualunquesiasi *secante* FMN dal comun vertice F e le due *corde* dall' altro BM, BN, con più le perpendicolari MA, NT al second'*asse*, provengano sempre *simili* i due Trapezj *birettangoli* BMAD, BNTD, sebbene per l' inversione solita *subcontrarj*. A fine di ciò dimostrare stacchisi dal vertice B la normale all' *asse* o la comun *tangente* BY, on-

onde l'angolo MBY si manifesta eguale a MFB, come lo è parimente BNΔ per causa di FΔ: ΔN: ΔB $\doteqdot$, ed in conseguenza anco NBU. Dunque non solamente NBM è sempre diviso nel mezzo da BY, e si ha in ogni caso BM:BN::MU:UN nel *sistema*, ma oltracciò, mentre nel Circolo si verifica MFB = 90° — MBF, vale l' inverso nell' Iperbola *conica* o sivvero NFB = NBF — 90°; e mentre nel primo FM : MB : FU — FM $\doteqdot$, all' incontro nell' altra si ha FN : NB : FN — FU $\doteqdot$, strettissime *analogie*. E procedendo più avanti, MBD = 90° — MBY = 90° — BNΔ = BNT; laonde ancora BMA = NBD. Finalmente, in virtù dei Triangoli *simili*, BM : BN : : BΓ : BΔ : : MΓ : NΔ : : FΓ:FΔ, che torna a dire FΓ : FB : FΔ *armonicamente* proporzionali (come altresì FM, FU, FN) ossia (5c) DΓ:DB:DΔ $\doteqdot$, e quindi BM:BN::BD : DΔ = NT; di modo che vien così stabilita senz' alcun dubbio la rammentata *similitudine*. Se poi colla dottrina *conica* si ponga mente all' angolo *k* che fa la *tangente* lateral dell' Iperbola col suo *asse* primario, egli è facilissimo intendere ch' esso non mai diventi minore del semiangolo *asintotico*; lo che esclude Tang.*k* nell' Iperbola dall' universalità della Trigonometria, nè la rende dicevole o acconcia a tal' uso: come eziandio si rileva dal paragone delle due *locali* Equazioni riportate all' uno od all' altro de' *fochi*, Rag.° vett. $= \frac{a^2 - e^2}{a + e \text{ Cos.} z}$ (posto *a* il *semiasse-trasverso*, e l' *eccentricità*), ove nell' Ellissi il numeratore è *positivo*, nell' Iperbola *negativo* (ch'è quanto dire *immaginario* il *semiasse-conjugato*), ed il denominatore nella seconda puote annullarsi, e difatto s' annulla quando Cos.$z = -\frac{a}{e}$, ossia venendo ad essere il *raggio* paralello all' *asintoto*, o all' estrema *tangente* dell' ultima Curva.

Corollario V.

Tornando all' Ellissi, agevolmente s' affaccia di subito l' angolo *k* eguale al *complemento* di *latitudine* geografica nel *meridiano*

no d' uno Sferoide *compresso;* ben differente dell'*Uovo*, alla quale più presto s' assimila lo Sferoide *oblongato* (51). Quindi è che le prime Formule trigonometriche superiori potrebbero scriversi parimenti con surrogare alla Tang. k la Cot. L, mentre intendasi per questa *sigla* la distanza dall' *Equatore* o l' angolo contenuto tra l' *asse* e la *normale* alla Curva. Delambre col solo *elemento* della *latitudine* (dopo Maupertuis, &c.), quando sia cognita l' *eccentricità* d' un' Ellissi, assegna espressioni forbite e abbondevoli, onde rintracciarne le rimanenti misure. È osservabile tra le altre *formule* quella sommamente elegante, che si riferisce al *raggio* del Circolo *osculatore*, cioè

$\frac{dA}{dL} = (1-e^2)(1-e^2 \text{ Sen.}^2\text{L})^{-\frac{3}{2}}$, da cui poscia l' Autore ricava la novissima *serie* per *rettificare* l' Ellissi conica. Nè puote sopra ciò cader dubbio tostochè gli *Elementi* ci avvisano dL : 1 :: dA : *Raggio osculatore* negli archi *simili* circolari. E presone il *limite* per la parabola d' Apollonio, chiamando D la distanza del *foco* dal di lei vertice principale, il *raggio osculatore* si rappresenta da $\frac{2D}{(1-\text{Sen.}^2\text{L})^{\frac{3}{2}}} = \frac{2D}{(\text{Cos.}^2\text{L})^{\frac{3}{2}}}$, per motivo di $1-e^2=(1+e)(1-e)=2D_z$ non meno che di $e^2=1^2$ subito che viene il *centro* assorbito di là dal confine assegnato alle grandezze *finite*.

Corollario VI.

Applicate l' espressioni medesime del passato *Teorema* ai Triangoli rettilinei, stante che Cos.z nel *limite* $=1-\frac{z^2}{2}$, mentre ad un tempo Sen.$z=z$, quelle Equazioni non conservano allora più la sembianza di *trigonometriche* del primo *grado*, ma d' *analitiche* del second' *ordine*, e sono difatto (Coroll. III. del II. *Teorema*) uniformi all'*universale* $z^2-2a\,\text{Cos.C}.z+(a^2-c^2)=0$, che colla *sussidiaria* in essa compresa (52), di cui parla il *Corollario* VII. del Teorema I., o con pari altro artificio (53) si scioglie per mezzo di *logaritmi*. Ed è quì da riflettersi che se una qua-

lunque delle Equazioni del precorso *Teorema* si sviluppasse mediante $\text{Cos.}z = \sqrt{1-\text{Sen.}^2 z}$, o viceversa, acquisterebbe consimilmente la *forma* medesima di *quadratica*, come per esempio, $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k\ \text{Sen.}z - \text{Cos.}\beta = 0$ cambierebbesi allora nella seguente $\text{Sen.}^2 z - 2\left(\frac{\text{Tang.}k\ \text{Cos.}\beta}{\text{Sec.}^2 k}\right)\text{Sen.}z - \frac{\text{Sen.}^2\beta}{\text{Sec.}^2 k} = 0$, cioè $\text{Sen.}^2 z - \text{Sen.}^2 k\ \text{Cos.}\beta\ \text{Sen.}z - \text{Cos.}^2 k\ \text{Sen.}^2\beta = 0$. Non diversamente avverrebbe dell' Equazione *classica* generale $A\text{Cos.}z + B\text{Sen.}z + C = 0$, che riducesi alla più semplice $\text{Cos.}z + A'\text{Sen.}z + B' = 0$: imperciocchè, sostituiti i valori noti *trigonometrici*, ne risulta $\text{Cos.}^2\frac{z}{2} + 2A'\text{Cos.}\frac{z}{2}\text{Sen.}\frac{z}{2} - \text{Sen.}^2\frac{z}{2} + B' = 0$; e scambievolmente da un' Equazione di quest' ultima *forma* (come avverte Goudin) si può sempre discendere di pari alla prima, e risolverla coll' istessa *Teorica* dell' Ellissi.

Corollario VII.

Dipende dalla medesima Equazione fondamentale, e n' è anzi un *caso* più semplice (Coroll. III. dell' ultimo *Teorema*) la ricerca della *parallassi d' altezza* nella Sferica Astronomia, conoscendosi l' *orizzontale* unitamente all' *altezza* apparente o vera dell'*Astro*, e non attendendo alla picciola aberrazione dalla *sfericità* della Terra, di cui Borda sopra ogni altro Geometra ha dato esatta contezza (54). Basta sol rammentarsi, che posta π la *parallassi* orizontale, h l' altezza *vera*, h' l' *apparente*, z la *parallassi* d' altezza si ha $\text{Sen.}z = \text{Sen.}\pi\ \text{Cos.}h'$, mentre d' altra parte $h' = h - z$, d' onde nasce una facilissima sostituzione e adattata al computo *logaritmico*.

SCOLIO.

A tutta la Scienza trigonometrica così concentrata dee far corona il *Teorema* prestantissimo di Legendre, annunziato da que-

questi nel M. DCC. LXXXVII. (55) e quasi contemporaneamente provato in sul finire del Secolo scorso XVIII.° da esso, da Delambre, e Lagrange (56). „ Un Triangolo *sferico* picciolis- „ simo può considerarsi a tutti i riguardi com' eguale a un „ Triangolo *rettilineo*, ch' abbia i *lati* dell' istessa lunghezza „ di quelli del primo, e ciascuno degli *angoli* minore d' ognu- „ no del primo di quanto importa la terza parte dell' eccesso dei tre su due *retti*, e vale a dire il terzo dell' *area* comune ad entrambi i Triangoli comparati „ (*Scolio* del I. Teorema). Ecco la Proposizione da dimostrarsi, ch' è d' utilità impareggiabile nella Geodesia teorico-pratica, e massime nelle operazioni delicatissime delle misure geografiche degli *archi* de' Meridiani, e perciò di tutto il Sistema *metrico* universale appresentatoci dalla Natura. I prelodati Analisti l' han ricavata da quelle Formule-*limiti*, intorno alle quali s' aggira il Corollario III. del II. *Teorema:* Legendre ha quindi lasciato il suo primo metodo attenendosi a quel di Lagrange, avvengachè fosse non meno facile e chiaro dedurlo dall' espressione $a\text{Sen.B} = b\text{Sen.(B+C)} - \frac{a^2}{2} b\text{Cos.C Sen.B}$; dove si rende osservabile che se il Triangolo-*limite* fosse rettangolo in C, avrebbesi $a\text{Sen.B} = b\text{Cos.B}$, cioè $\frac{b}{a} = \text{Tang.B}$, come nella Trigonometria Rettilinea; e puote ogni Triangolo considerarsi unione o complesso di due ortogonj. Ma in generale quella espressione analitica ridotta all' equipollente $(1 + \frac{ab}{2}\text{Cos.C})\, a\text{Sen.B} = b\text{Sen.(B+C)}$ manifesta con tutta evidenza che la quantità, per cui differisce nel *primo* suo nascimento o nell' *ultimo* suo decremento (*Scolio* suddetto) il Triangolo *sferico* dal *rettilineo*, è di due *gradi* inferiore rispetto all' *evanescente* grandezza dei *lati* dell' uno o dell' altro Triangolo; di tal maniera che torna l'istesso a distribuirla (senza poter mai temerne errore del *primo grado* in linea d' *approssimazione*) o egualmente o disegualmente su ciascheduno degli *angoli*. Da questo riflesso havvi dunque ragion d' inferirne che posto θ l' eccesso della *somma* degli *angoli* A, B, C d'un picciol Triangolo sferico

sopra due *retti*, o ciò ch' è il medesimo, l' *area* (di *second' ordine*) dello sferico o rettilineo di lati respettivamente eguali, gli *angoli* del rettilineo equivalente debbano essere $A-\frac{\theta}{3}, B-\frac{\theta}{3}, C-\frac{\theta}{3}$, e che dipenda dall' istesso principio la soluzione eziandio di quei *finiti* Triangoli sferici, i quali abbiano due piccolissimi *angoli* acuti, perchè diventa piccolissimo allora in tutti i suoi tre *lati* il *supplemento* allo spicchio sferico del Triangolo *polare* corrispettivo.

Aveva a buon diritto avvisato nella soggetta materia Lagrange (57) che „ Dans l'Analyse, la perfection consiste à n' employer que le moindre nombre possible de *principes*, & à faire „ sortir de ces *principes* toutes les vérités qu'ils peuvent renfermer, par la seule force de l'Analyse „. Poco dopo parlando Lacroix del metodo più istruttivo, che doverebbe adoprarsi nelle matematiche Discipline, passa a dire (58) „ En général, il „ semble que les Sciences physico-mathématiques doivent tou„ jours se ramener à un Problème unique d'Analyse ou de Géo„ métrie „. Vi sono di fatto in ogni Facoltà del sapere umano alcune eminenti *Proposizioni*, stabilite e dimostrate le quali o colla ragione o coll' esperienza, tutte le verità che rimangono, altro non sono fuori che quelle medesime espresse sotto diversi vocaboli, più o meno trasposte o variamente applicate. L' istrumento del Calcolo serve sovente di valevolissimo ajuto al corto intendimento dell' uomo; ma non di rado intravviene che da semplicissime speculazioni *sintetiche* sorgano sottilissimi risultati. Chi è, per esempio, che esercitatosi al raziocinio immantinenti non giunga ad iscorgere come la *frazione continua* quasi *parallella* o per dir meglio *asintotica* $\frac{m}{m+1-\frac{m}{m+1-\frac{m}{m+1-\frac{m}{m+1-}}}}$ ec. in infinito abbia per suo valor *limite* l' unità, e come dei due suoi *valori* diversi, che somministra l' Equazione *resolutiva*

$\dot{x} = \frac{m}{m+1-x}$, cioè $\frac{m+1}{2} \pm \frac{m-1}{2}$, il valore m sia estraneo all' assunto, ed inerente soltanto alla immancabile ed individua verificazione *analitica* di $m = \frac{m}{m+1-m}$; uguagliandosi per l' istesso motivo i due *valori* o *radici* 1 nell'unico *caso* della *frazione continua* speciale

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\text{ec.}}}}}$$

in infinito protratta: E coll' istessa evidenza si fa palese l' istesso *limite* 1 spettante all' altra *Serie-infinita*

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\cfrac{m'''}{m'''+1-\cfrac{m''''}{m''''+1-\text{ec.}}}}}}$$

, sebbene in questa sotto la medesima forma, ma non *periodica* come la prima, le grandezze m, m', m'', m''', m'''', ec. diventassero, viavia crescendo, inassegnabili ed *infinite*: imperciocchè qualunque di loro si rendesse *infinita*, vien ad essere indubitata l' eguaglianza $\frac{\infty}{\infty+1} = 1$, d' onde risalendo quant' occorresse di grado in grado, risulterebbe sempre alla fine $\frac{m}{m+1-1} = 1$. Havvi in un Libro *elementare* pochissimo cognito (59) il bel Teorema *aritmetico* (ma però senza prova) che „ La *somma* di n quadrati dei numeri *naturali* s'uguaglia al doppio della *somma* di n numeri *triangolari* meno l'ultimo *triangolare*, e la *somma* di n cubi pareggia il quadrato dell' ultimo numero *triangolare* „ dalla qual proposizione nacquero appunto sul principio del Secolo XVII.° nell' Italia le famose Formule Cavaleriane conducenti alla *quadratura* delle Parabole. Ora ognuno di per se concepisce che $2 \times \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} =$

$\left(\frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\right)\left(\frac{2\,(n+2)}{3}-1\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{2n^3+3n^2+n}{1\,.\,2\,.\,3}$; e con egual chiarezza egli vede che $\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{3n^2}{12}$, espressione dataci dall' ordinario metodo delle *somme* delle *potenze* numeriche, incominciando da 1 e non da 0 la *Serie* (60). Io feci in altro luogo osservare (61) che la *cubatura* esatta e geometrica d' una porzione di sfera conseguivasi mercè d' una *sintesi* agevolissima e scevra d'alcun ricorso al Calcolo *infinitesimale*, diversamente dalla più semplice delle due maniere adoprate da Bossut nel Paragrafo II. dell' *Appendice* ai recentissimi suoi *Trattati* d'Analisi *differenziale* e *integrale*. Sfuggì a sagacissimo Autore (62) un' espression discordante dal puro e terso linguaggio geometrico là dove scrisse, trattando delle irregolarità delle *parallassi* astronomiche, esservi quella tra l' altre „ la quale di- „ pende dalla *figura sferoidale* del nostro *Globo*. „ Dalembert nell' *Enciclopedia metodica* avendo in veduta la generalizzazione dell' integrale $\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$ anco pel caso di $m=-1$, comincia da far riflettere che $\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ in quella ipotesi particolare diventa $\frac{0}{0}$, laonde colla *Regola* Bernoulliana variandosi l'*esponente m*, ottiene la Formula $dm\frac{(x^{m+1}\mathrm{L}x-a^{m+1}\mathrm{L}a)}{dm}$, e perciò nell'indicata supposizione $\mathrm{L}x-\mathrm{L}a$, o sivvero $\mathrm{L}x+C$; mentre senza l'ajuto *indiretto* della detta *Regola* ho altrove mostrato (63) che si giunge *immediatamente* al medesimo fine. Sonovi alcuni che han giudicato *falso* l'accorgimento analitico di Dalembert per arrivare all' *integrazione* dell' Equazioni *differenziali* di prim' ordine o *lineari*: a me pare che, se pur siavi difetto, esso consista non già nel *principio*, coerente a mio senso colla familiar dottrina de' *limiti*, ma piuttosto nell' espressione

$B+B\Pi$, come quella che stante Π *infinitesimo*, debba supporre *infinito* B affinchè $B\Pi = C$ s' ottenga *finito*; quando per il contrario e nelle *Serie ricorrenti* e nel *Calcolo delle differenze* si evita ciò seguitando l' altro artificio *diretto*, avanti di tutti introdotto dal prefato Bossut. Non è tampoco, giusta il mio sentimento, concludente e piena la prova che ad un' Equazione *biquadratica* universale $x^4+Bx^2+Cx+D=0$, mancante del secondo *termine*, spettino IV. *radici* tutte *reali*, se s' abbiano a un tempo verificate le due *condizioni* $B<0$ (cioè *negativo*), $B^2-4D>0$ (cioè *positivo*), o tutte IV. *imaginarie*, se manchi alcuna delle due *condizioni* medesime (che lasciano sempre libero il *segno* e valore di C), qualora non si ricorra a dedurla dall' Equazione *cubica ausiliaria* $z^3+2Bz^2+(B^2-4D)z-C^2=0$ dov' è per lo meno una *radice* z' *reale* e *positiva*, e dal valor *derivato* di $x=\pm\sqrt{\frac{z'}{2}}\pm\sqrt{\left(-\frac{2B+z'}{2}\mp\sqrt{\frac{(z'^2+2Bz'+B^2-4D)}{2}}\right)}$, il quale evidentemente dimostra la verità delle predette due *condizioni* simultanee e immancabili.

Quello in somma, che in tutte le Scienze *esatte* ha da prendersi singolarmente di mira, si è la lucida derivazione da pochi ed inconcussi *principj* delle verità ormai conosciute, e dell' altre molte che ancora ignoriamo esservi incluse o connesse; perchè l' eccellenza e chiarezza del metodo somministran la via più facile e piana per giungere alle scoperte; e solo allora la mente umana potrebbe dirsi in tutta l' estensione del termine possedi-trice del vero sapere. Colla *Formula* unica del *Binomio* di Newton si conseguiscono le *differenze* e i *differenziali* di tutte le *Funzioni* analitiche: per mezzo dei *differenziali* o de' *limiti* si scuoprono facilmente gli elementi, variazioni, e progressi d' ogni grandezza; nè sono i due opposti confini dell' *infinito* ed *infinitesimo* se non che i punti estremi, trascendenti il nostro concepimento, ai quali può sempre accostarsi quantunque piaccia una grandezza *finita*, senza toccarli giammai e molto men trapassarli. Non è dunque altro che l' espressione d' un *Numero inassegna-*

gnabile, a motivo della sua immensa grandezza, la Serie-infinita *paralella* $1+1+1+1+1+1+1+$ ec. $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$, come si rileva da mantenersi l'istessa $1+1+1+1+1+1+1+\frac{1}{0}$ aggiungendovi l'ultimo avanzo, e dal diventare $m+m+m+m+m+m+m+$ ec. $= m\,(1+1+1+1+1+1+1+$ ec.$) = m\left(\frac{1}{1-1}\right) = \frac{m}{0}$ $= \frac{m}{1-1}$ conformemente alle regole di *proporzione*. Ben lontana perciò quella *Serie* da meritare il predicato di *falsa*, come moderni Analisti han pensato (64), ell'è anzi il prototipo dell'infinita *divisibilità* di qualunque siasi grandezza considerata in astratto, siccome fu concepita dai primi Filosofi della Grecia. Niuna difficoltà poi s'incontra nel render ragione d'una conseguenza legittima, che ha ricavata Legendre (65) dalla Serie-infinita di Lambert (66) $\text{Tang. } x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\text{ec.}}}}}}$

tutte le volte che facciasi $x=\pi$ *semicirconferenza* d'un Circolo del *raggio* 1: perocchè in questo *caso* speciale non può a meno di non essere $-0 = \cfrac{\pi}{1-\cfrac{\pi^2}{0}}$, cioè $0 = 3 - \cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\text{ec.}}}}$ in infinito.

Tutta la Teoria finalmente delle così dette *Funzioni simetriche*, tanto feconda quant'è nelle Matematiche in generale ed in ispecie nella Trigonometria analitica e nella Dottrina dell'Equazioni, si riduce a una facile applicazione di quel *Principio* sommo e intuitivo che i Metafisici appellano *Ragion sufficiente*, come non mancano d'accennarlo in più luoghi gl'Illustratori degli *Elementi d'Algebra* di Clairaut (67). In proposito dei quali *Elementi* giova quì d'avvertire che le due *equazioni* ivi date dapprima $3a^2+2pa+q=0$, $2a^3+pa^2-y=0$, come aventi un *divisore*

co-

comune qualora l' Equazione *cubica* $x^3+px^2+qx+r=0$ abbia due eguali *radici* a, conducono al risultato medesimo delle altre somministrate dipoi $3a^2+2pa+q=0$, $a^3+pa^2+qa+r=0$, perchè dalla seconda delle due prime ottenendosi $r=2a^3+pa^2$, e questo valore sostituendolo nella quarta, procede $3a^3+2pa^2+qa$, cioè $3a^2+2pa+q$, come sopra. E le ingegnosissime speculazioni di Landen, mercè delle quali l' Algebra de' *finiti* ha sommamente estesi i suoi antichi confini, sono appoggiate in ultima analisi alla *determinazione* del valor vago e *indeterminato* $\frac{0}{0}$, che potrebb' anco servire di scorta onde togliere dalla classe delle *Serie infinite*, che portano al *falso*, l' elegantissime *trigonometriche* (68)

$$A=1-\text{Cos.}A-\tfrac{1}{3}\text{Cos.}^3A-\tfrac{3}{40}\text{Cos.}^5A-\text{ec.}=0,$$

$$A=1-\text{Cot.}A+\tfrac{1}{3}\text{Cot.}^3A-\tfrac{1}{5}\text{Cot.}^5A+\text{ec.}=0,$$

posto A un *arco* qualunque di circolare *periferia*; Serie che Jeaurat pubblicò con molt' altre nel declinare del Secolo scorso.

ANNOTAZIONI ALL' ANTECEDENTE MEMORIA.

(1) = Journal Polytechnique, ou Bulletin du travail fait à l' Ecole centrale des Travaux publics, publié par le Conseil d'Instruction & Administration de cette Ecole. Premier Cahier. Mois de Germinal. A Paris, de l'Imprimerie de la République. An. III. = Vedasi alla pag. 1 l'Articolo *Stéréotomie* scritto da Monge, e segnatamente tra i Problemi consecutivi di *Géométrie descriptive* il 12.^mo a pag. 13.

(2) = *Euclidis Elementa etc.* = Lib. XI. Prop. XXI.

(3) = Principes d'Astronomie Sphérique, ou Traité complet de Trigonométrie Sphérique etc. Par M. Mauduit, Professeur de Mathématiques. A Paris. Chez H. L. Guerin & L. F. Delatour etc. M. DCC. LXV. = Chap. IV. *De la résolution analytique ou algebrique des Triangles Sphériques* nel. Prob. III. *Scholie* §. 219. pag. 116. Probl. VI. §. 223. pagg. 119-20-21, Probl. VII. §. 224. pagg. 121-22, Probl. IX. *Premier Scholie* pagg. 124-25.-„ Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, pro Anno M. DCC. LXXIX. Pars prior. Petropoli, Typis Academiae Scientiarum. M. DCC. LXXXII. „ dopo l'Istoria al Titolo *Mathematica* pag. 72. *Trigonometria Sphaerica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata. Auctore L. Eulero* (in §§. 26 sino alla pag. 86. incl., Tab. I. Figg. 7. 8.). Vedansi spezialmente i §§. 4. 5. 9. pagg. 74-5-7, e nell' ultima il §. 12. *Cum igitur tota Trigonometria Sphaerica tribus aequationibus supra inventis innitatur &c.*, e pe' i *logaritmi* il §. 19. pag. 80.) - „ Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MDCC. LXXXIII. avec les Mémoires de Mathématique & de Physique pour la même Année &c. A Paris, de l'Imprimerie Royale, MDCCLXXXVI. „ dopo l' *Histoire* alla pag. 291. *Trigonométrie Sphérique, déduite très-brièvement & complétement de la seule solution algébrique du plus simple de ses Problémes généraux, au moyen des diverses transformations dont les rapports des sinus & cosinus, tangentes & cotangentes, sécantes & cosécantes d'un même Arc ou d'un même Angle plan, rendent cette solution susceptible, & comprenant quelques Formules & Observations qu' on croit utiles & neuves. Par M. l'Abbé De Gua* „. (Si riscontrino il *Probléme unique* alla pag. 303., la Fig. 1. della *Planche* IV., i VII. Corollarj sino a pag. 318. incl., gli altri sino al XIII. ed alla pag. 335. incl., e finalmente le III. *Observations générales* dalla pag. suddetta alla 343. incl. ch' è il termine della Memoria).

(4) = Eléments de Géométrie, avec des Notes; par M. Legendre Membre de l' Institut National de France, et de la Société Royale de Londres. Cinquiéme Edition. A Paris, Rue de Thionville, N.° 116., chez Firmin Didot &c. An XII. (1804.) *Traité de Trigonométrie* dalla pag 328. sino alla 423., diviso in C. X. §§. — „ Méthodes analytiques pour la détermination d' un Arc du Méridien; par J. B. J. Delambre, Membre de l'Institut National et du Bureau des Longitudes, l'un des deux Astronomes chargés de la mesure de-

l'Arc compris entre Dunkerque et Barcelonne: précédées d' un Mémoire sur le même sujet, par A. M. Legendre &c. De l' Imprimerie de Chapelet. A Paris, chez Duprat &c., quai des Augustins, près le Pont-Neuf. An VII. „ - „ Journal de l' Ecole Polytechnique, ou Bulletin du Travail fait à cette Ecole; publié par le Conseil d'Instruction & Administration de cet Etablissement. Sixiéme Cahier. Tome II. A Paris, de l' Imprimerie de la République. Thermidor An VII. „ segnatamente alla pag. 270. *Solutions de quelques Problèmes relatifs aux Triangles sphériques, avec une analyse complète de ces Triangles. Par J. L. Lagrange* sino incl. alla pag. 296., la qual Memoria è distinta in 28. paragrafi.

(5) = Mémoire sur les usages de l'Ellipse dans la Trigonométrie Sphérique. Par le Citoyen Goudin. A Paris, chez Régent et Bernard, quai des Augustins, N.° 37. L'An V-1797. „ (*Chapitre* II. alla pag. 18. e segg.).

(6) = Invention nouvelle en Algébre. Amsterdam, M. DC. XXIX. „ *Brochure*, in oggi rarissima, d' *Albert Girard Samiélois* (cioè di Saint-Michel, San-Mihel o Samiel *en Barrois*), consistente nel dar la misura degli Angoli-solidi mediante l'arco dei Triangoli-sferici; un Esemplar della quale trovasi nella Biblioteca dei Re di Francia. — Vedansi in oltre la Nota (zz) de' miei *Pensieri Geometrici* nel Tomo X. di questa Raccolta alla pag. 673. e la precitata Opera di Mauduit (Nota (3)) al Capo V. Tav. III. Fig. 33., dopo la V. Sezione ed il IV. Esempio, nel §. 293. pag. 168-69 ov' è *Problème* al termine dell' istesso Capitolo, intitolato (§. 247. pag. 142.) *Des Analogies différentielles des Triangles sphériques & rectilignes quelconques*.

(7) = Mio MS. diviso in IV. Libri o Sezioni, e tuttavia inedito, sebben lo adoperi come *Prelezione* sintetica universale delle curve o Linee di second' *ordine*.

(8) = Oeuvres de M. De Maupertuis. Nouvelle Edition corrigée & augmentée. A Lyon, chez Jean-Marie Bruyset, Libraire, grand Rue Mercière, au Soleil. M. DCC. LVI. Tome quatrième. *Astronomie Nautique, ou Elémens d' Astronomie, tant pour un Observatoire fixe, que pour un Observatoire mobile. Imprimé au Louvre en* M. DCC. XLIII. *et en* M. DCC. LI., dalla pag. 95. alla 186. inclusivamente. „ — „ Manuel Trigonométrique de M. l'Abbé De la Grive. „ — „ Trigonometria Piana e Sferica di Antonio Cagnoli; Edizione seconda notabilmente ampliata. In Bologna, per i Fratelli Masi e Comp. M. DCCC. IV. „ — „ De la Corrélation des Figures de Géométrie. Par L. N. M. Carnot, Membre de l' Institut National. De l' Imprimerie de Crapelet. A Paris, chez Duprat, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins. An. IX = 1801. „

(9) = Encyclopédie Méthodique „ — *Mathématiques* — , par MM. d' Alembert, l' Abbé Bossut, de la Lande, le Marquis de Condorcet, Charles, etc. „ Tome III. A Paris, chez Panckoucke etc. M. DCC. LXXV. „ (Vedasi *Sinus* (Géométrie) dalla pag. 37. Col. 2. sino alla pag. 53. 2. Col. incl. — „ Traité de Mineralogie; par le Citoyen Haüy, Membre de l'Institut National des Sciences & Arts, et Conservateur des Colle-

ctions Mineralogiques de l'Ecole des Mines. Publié par le Conseil des Mines etc. De l'Imprimerie de Delance. A Paris, chez Louis Libraire, Rue de Savoye, N.° 12. An X (1801) ,, . Vedasi specialmente il Capo II.°).

(10) Prop. XI. Lib. XI.

(11) Legendre *Traite de Trigonométrie* precitato, al §. LXXVII. pagg. 389-90. — Lagrange nella Dissertazione accennata dalla Nota (4), al §. 15. pagg. 281-82. confrontato col §. 3. pagg. 271-72.

(12) *Euclidis &c.* Prop. IV. Lib. XI.

(13) *Elementa Geometriae* Lib. I. Prop. XXI.

(14) Volume X. di questa Raccolta alla p. 571. ov'è il *Corollario* VI. del Teorema dell' Articolo I. de' miei *Principj della Meccanica richiamati alla massima semplicità ed evidenza*. (Fig. 54.) .

(15) = Essai d'une Théorie sur la structure des Cristaux, appliquée à plusieurs genres de substances cristallisées; par M. l'Abbé Haüy, de l'Académie Royale des Sciences, Professeur d'Humanités dans l'Université de Paris. A Paris, M. DCC. LXXXIV. ,, — ,, Journal de l' Ecole Polytechnique &c. Tome III. ,, — ,, Eléments de Géométrie &c. par A. M. Legendre etc. ,, *Appendix aux Livres* VI. *et* VII. *Les Polyédres reguliers.* Proposition III. Problème, alle pag. 236-7 — (*Goniométre* di Garangeau negli ,, Elementi di Chimica ,, del Brugnatelli) .

(16) Legendre l. c. *Livre* III. Corollario della Prop. XXXII. alla pag. 92. , Fig. 134. della Tavola V.

(17) Vedasi lo *Scolio* del Teorema dell' Articolo I. (Fig. 63.) dei *Principj della Meccanica* sopraccitati (Nota (14)), alla pag. 534.

(18) = *Note* X. degli ,, Eléments de Géométrie ,, di Legendre, in fondo del Problema I. pag. 320. *Cette Formule très-élégante est due à Simon Lhuillier* .

(19) Memoria citata nella *Nota* (4), al §. 10. pagg. 277-78.

(20) Si riscontri il Proemio dei di già rammentati *Principj della Meccanica &c.*, alla pag. 481.

(21) Basta confrontare lo *Scolie* della Prop. XVIII. alle pagg. 217-18. del Libro VII. degli ,, Elementi di Geometria ,, di Legendre colla *Note* (1) in principio del suo *Traité de Trigonométrie* alla pag. 328.

(22) Memoria Trigonometrica precitata, e nominatamente nel §. 7. alle pagg. 274-75.

(23) = Claudii Ptolemaei Pelusiensis Alexandrini omnia quae extant Opera, praeter Geographiam, &c. Basileae. In Officina Henricbi Petri, Mense Martio, M. D. LI. ,, *Magnae Compositionis Cl. Ptolemaei Alexandrini Libri* (XIII.) *à Georgio Trapezuntio è Graeco conversi* ,, ed ivi alla pag. 7. Lib. I. Caput IX. *De quantitate rectarum linearum, quae in Circulo perducuntur,* ed il Teorema (colle *Additiones Gaurici*), ed il Testo e Figura in legno alla pag. 9. Col. 1. e 2. *Si Quadrilaterum inscriptum Circulo &c.* — Carnot Op. cit. (Nota (3)) *Problème* II. §. 137. alle pagg. 95-96-97. ,, Tracer une Figure qui represente les principaux rapports existans entre les sinus & cosinus de deux angles proposés, les sinus & cosinus de leur somme, & les sinus & cosinus de leur différence ,, dal §. 127. al 141., e dalla p. 84. a 101. incl.

(24) Vedasi la precitata *Trigonometria* di Cagnoli al Capo III. pagg. 16-17. §§. 88-89. Figg. 2-3. della Tav. I., e Capo IV. §§. 93-100. incl. dalla pag. 18. alla 19.

(25) Lagrange nella prelodata Memoria ai §§. 14. 15. 16. 17. ed alle pagg. 280-81-82-83. — Legendre *Trigonometrie ec.*, §. LXXX. pag. 391. e seguenti.

(26) Si riscontri alla pag. 303. e segg. la Memoria citata nell'antecedente (3) *Nota*.

(27) *Correlation des Figures &c.* Problème III. dal §. 142. al 165. e dalla pag. 101. alla 117. inclusivamente. „ Trouver les rapports existans entre les côtés d'un Triangle quelconque, les perpendiculaires menées des angles sur les côtés opposés, les segmens formés sur ces côtés et ces perpendiculaires, et enfin les angles résultans de cette construction „.

(28) *Geometriae Elementa* Lib. II. Prop. XII. e XIII.

(29) L. c. nella Nota (52) consecutiva.

(30) Legendre *Eléments de Géométrie &c.* Lib. VII. allo *Scholie* della Prop. XV. pag. 215., e *Traité de Trigonométrie* nella *Remarque* dopo il VI. *Cas*, §. LXXIV. pag 386.

(31) Dissertazione Trigonometrica precitata, nel §. 12. p. 279. ov'è la Formula $\text{Sin. } \phi = \frac{f}{\text{Sin. } a}$.

(32) *Elementa Geometriae*, Lib. III. Prop XXXVI. e suo Corollario.

(33) Legendre *Traité de Trigonométrie*, IV. *Cas*, §. LVII. 372-73-74.

(34) Memoria citata nella *Nota* (4), ed ivi *Méthode pour déterminer la longueur exacte du quart du Méridien &c. Note* III. a pag. 2. „ Du Calcul des Triangles „ segnatamente alla pag. 13., e quindi da . pag. 2. alla 6. incl. d'altra numerazione *Observations sur quelques endroits du Mémoire du Cit. Delambre*, divise in V. §§.

(35) Nel Tomo X. delle Memorie della nostra Società Italiana delle Scienze alla pag. 560. Fig. 42.

(36) = Nuovi Elementi di Geometria „ &c. rammentati nella *Nota* seguente (59), che quantunque anonimi si credon d' Arnauld, nel Libro XIII. N. XXIX. pagg. 393-94.

(37) = „ De la Corrélation &c. „ *Problema* II. §. 135. pag. 94.

(38) Legendre *Eléments* de Géométrie &c. alla *Note* V. *Problème* III. pag. 296. Fig. 5. della Tavole XIII.

(39) Proposizione indicata nella precedente *Nota* 28.

(40) „ Elementi d' Euclide „ nel l. c. di sopra.

(41) Legendre *Eléments de Géométrie &c.* Nota V. *Problème* I. (Fig. 3. *Planche* 13.) alla pag. 294.

(42) *Notes sur les Eléments de Géométrie*, alla X., *Problème* I. pagg. 317-18.

(43) Goudin nel citato Opuscolo (ved. *Nota* (5)) al §. 22. pag. 19.

(44) *Chapitre* II. della preindicata Operetta, intitolato *Propriétés de l' Ellipse*, ai §§. 19. 27. 37. 44. 51. pagg. 18-20-25-28-30. paragonati col §. 26. pag. 20.

(45) *Euclidis Elementa* Lib. III. Prop. XXXV.

(46) Vedansi „ *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine. Par. M. Bezout. A Paris*, M.DCC.LXX. „ Tomo IV. alle pagg. 177-78; e *passim* tutti gli Elementisti.

(47) *Elem. Eucl.* Prop. III. Libro VI.

(48) *Euclidis Elementa* Lib. VI. Prop. VIII.

(49) = *De Calculo Integralium Exercitatio Mathematica &c. Florentiae.* M. DCC. XCII. „ *Sectio* II. „ - Carnot *De la Corrélation &c.* al §. 253. pagg. 186-87. (*Planche* IV. Fig. 28. ossia ultima).

(50) = *Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini Libri* VIII. (VI). *Pisauri*. M. DC. II. *Apud Hieronymum Concordiam*. „ Lib. III. dopo il *Problema* I. *Prop.* V. *Ut Eratosthenes* alla pag. 5., ove a pag. 7. sta scritto *Secundum Problema hoc erat &c.* coll'annessa Figura, d'onde tosto ricavasi il risultato che segue.

(51) Leggansi le molte Memorie e Quistioni insorte a questo proposito nel Secolo scorso tra gli Accademici Parigini.

(52) Legendre *Traité de Trigonométrie* ai §§. XLV. e XLVI. pagg. 364-65-66.

(53) Goudin Op. cit. §. 26. pag. 20. — Legendre *Traité de Trigonométrie* §. LVI. pag. 371.

(54) = Description et usage du Cercle de réflexion, avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques. Par le Chevalier de Borda, Capitaine de Vaisseau, Chef de division, et Membre des Académies Royales des Sciences & de Marine. De l'Imprimerie de Didot l'aîné. A Paris, chez Didot fils-aîné = Jombert jeune, Rue Dauphine, M. DCC. LXXXVII. „ (Vedansi *Chapitre* III. dalla pag. 33. alla 72. incl. e le due delle XIII. Tavole VII. e VIII.).

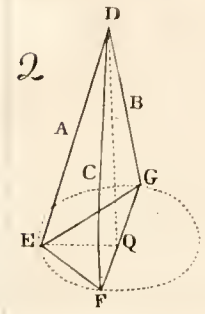
(55) „ Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCC. LXXXVII. avec les Mémoires de Mathématique & de Physique pour la même Année &c. A Paris, de l'Imprimerie Royale, M. DCC. LXXXIX. „ dopo l'*Histoire* alla pag. 352. *Mémoire sur les operations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la Terre. Par M. Le Gendre.* (Si consulti nominatamente il §. VI. alla pag. 358. *Théoreme concernant les Triangles Sphériques, dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la Sphère* sino alla pag. 359. incl. mentre il resto della Memoria, corredata d'una Tavola di Num. VII. con 6. Figure incisevi, finisce inclusivamente alla pag. 383.).

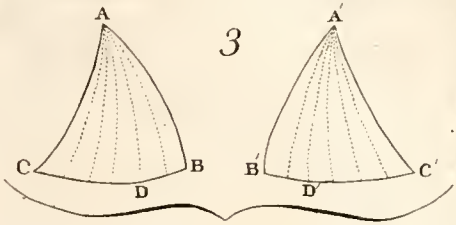
(56) Opera citata nella *Nota* (4) al N. III. pag. 12. *Résolution des Triangles Sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la Sphère*, sino alla pag. 14. inclusivamente. „ Traité de Trigonométrie „ *Appendice* &c. „ al §. V. e §§. di suddivisione CV - VII. dalla pag. 416. alla 420. incl. — „ Formules & méthodes employées dans les Calculs de la Méridienne de France. Par J. B. J. Delambre &c. „ nel §. *Calcul d'un Arc du Méridien dans le Sphéroïde elliptique* alla pag. 88. „ L'excès sphérique a pour expression &c. „ Preindicata Memoria Trigonometrica (*Nota* (4)) in calce; dal §. 26. pag. 291. all' ultimo 28. ed alla pag. 296. inclusivamente.

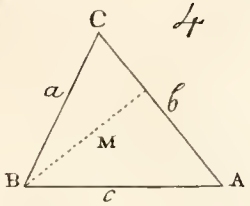
(57) Vedasi la prefata Memoria Trigonometrica nel §. 13. pag. 280.

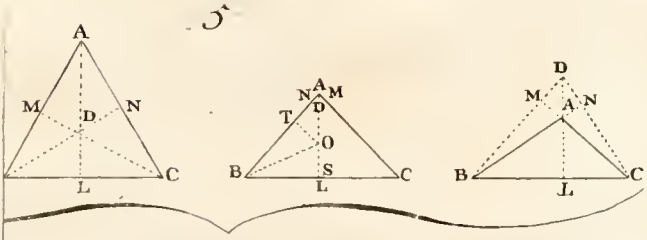
(58) „ Bibliothèque Française, Ouvrage periodique rédigé par Ch. Pougens &c. Deuxième Année. Paris, Vendémiaire An. X. Octobre 1801. „ al N. VII. e pag. 67.

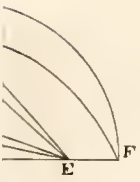
(59) „ Nouveaux Elémens de Géomé-


2
D
A
B
C
G
E
Q
F


A
C
B
D
3
A'
B'
C'
D'


C
4
a
b
M
B
A
c


5
A
M
N
D
L
C
A
N
M
T
D
O
B
S
L
C
D
M
A
N
B
L
C


E
F

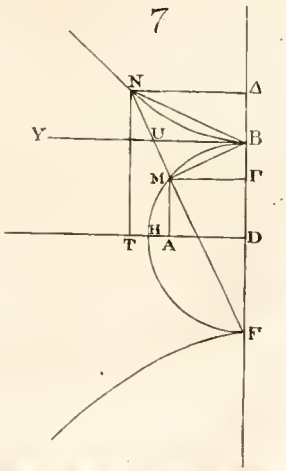
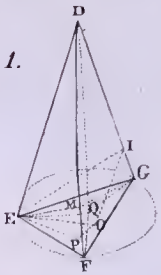
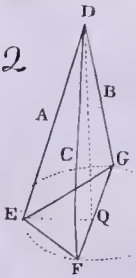
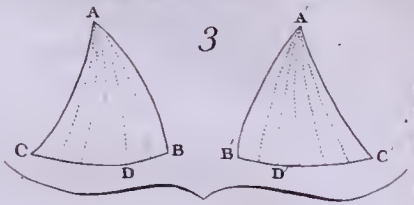

7
N
Δ
Y
U
B
M
Γ
H
T
A
D
F

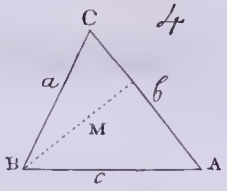
Fig. 1.

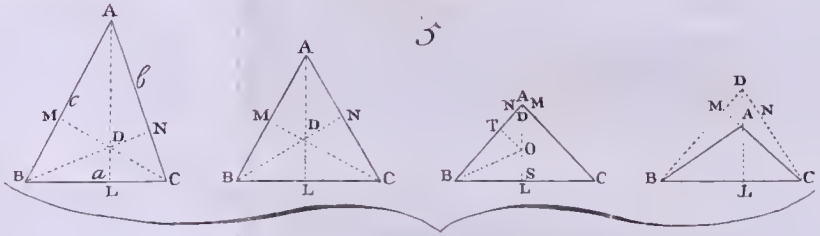

D
I
G
E
M
Q
O
P
F

2

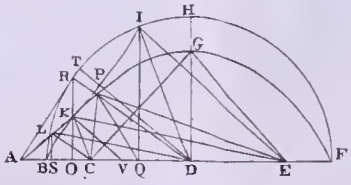

D
B
A
C
G
E
Q
F


A
C
B
D
3
A
B
C
D

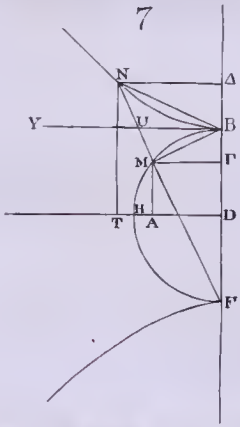

C
4
a
b
M
B
A
c


A
5
b
c
M
N
D
B
a
L
C
A
M
N
D
B
L
C
A
N
M
T
D
O
B
S
L
C
D
M
A
N
B
L
C

6


I
H
G
T
R
P
K
L
A
B
S
O
C
V
Q
D
E
F

7


N
Δ
Y
U
B
M
Γ
H
T
A
D
F'

trie, contenant outre un ordre tout nouveau &c., Seconde Edition. A la Haye. Chez Henry Van Bulderen &c. à l'Enseigne de Mezeray, M. DC. XC. ,, Libro IV. *Problema* IV. N. LV. pag. 134., e *Problema* V. N. LVI. pag. 135.

(60) Allora l' indice *n* nelle conosciute espressioni ordinarie *analitiche* va di pari col numero delle *potenze* sommate.

(61) ,, Pensieri Geometrici ,, nel Tomo X. precitato di questa Collezione Accademica, alla pag. 649. e segg.

(62) ,, Notizie Astronomiche adattate all' uso comune. In Modena, presso la Società Tipografica (T. II. MDCCC.II.) ,, Cap. IX. *Delle Parallassi* (T. I.), al §. 216. pag. 156.

(63) ,, *Magnitudinum Exponentialium Logarithmorum, & Trigonometriae sublimis Theoria, nova metodo pertractata. Florentiae,* M. DCC. LXXXII. ,, Capitolo X. intitolato *Calculi Integralis Paradoxon enodatum*, alla pag. 601.

(64) ,, Supplément à l'Algébre de Clairaut ,, Cap. III. *Des Proportions, des Progressions, des Suites & des Logarithmes*, nel Tomo II. dell' Opera quì sotto citata (*Nota* 67), alle pagine 346. e 47.

(65) Eléments de Géométrie &c. ,, *Note* IV. alla pag. 286., e segnatamente dopo il *Théoréme* a pagg. 292-3.

(66) ,, Histoire de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres. Année M. DCC. LXI. A Berlin &c. ,, §. 35. pag. 283.

(67) ,, Elémens d'Algébre, par Clairaut, cinquième Edition. Avec des Notes & des Additions &c. A Paris, chez Duprat &c. An V (M. DCC. XCVII.) ,, e precisamente nel Tomo II. alle pagine 245-46., e nelle *Additions à la* IV.me *Partie*, Nota 3. rapporto agli Articoli LIV. LV. pagg. 90-99., Nota 4. N. 9. pagg. 112. e 114.

(68) ,, Mémoires de Mathématique & de Physique présentés à l' Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lus dans ses Assemblées. Tome quatrieme. A Paris, de l'Imprimerie Royale M. DCC. LXIII, ove dalla pag. 524. sino a 540. incl. si legge *Mémoire sur le mouvement des Planétes, & moyen de calculer leur équation du centre pour un temps donné. Par M. Jeaurat, Professeur de Mathématique à l'Ecole Royale Militaire*, e s' incontrano nelle pagg. 527-28-29-30. tra l' altre Serie-infinite ancor quelle quivi notate.

ME-

MEMORIA

Dell'Abate Pietro Franchini

OVE SI PROPONGONO DE' NUOVI METODI TENDENTI A PERFEZIONARE L'ANALISI ALGEBRICA

PRESENTATA DA SEBASTIANO CANTERZANI

il dì 5. *Giugno* 1805.

1.° Nella scienza dell' Analisi algebrica, sì valorosamente promossa a' dì nostri, per opera specialmente de' Geometri Italiani, parmi che non tanto si desideri l'ampliamento ulteriore delle dottrine, quanto il miglioramento de' metodi che ad esse conducono; perchè alcuni sono intrigati soverchiamente, o non abbastanza diretti e generali; altri dipendono da elementi eterogenei od intempestivi, come le costruzioni sintetiche, i teoremi geometrici non essenziali, e le nozioni artificialmente anticipate; e parecchi consistono in artifizj particolari ed isolati, in vece di derivare insieme da una o più formole generali. Quanto più eleganti, più amene, più facili, non diverrebbero le scienze esatte; se una pura e semplice analisi rapidamente svolgesse tutta la serie delle successive nozioni! Io andrò esponendo il risultato de' tentativi da me fatti per conseguire in molti casi il miglioramento di isato, e vi unirò alcune ricerche, atte a promuovere in qualche guisa la scienza stessa.

2.° Problema. Si dimanda di generalizzare colla massima semplicità il problema in cui si cerca = *la somma de' prodotti, che si ottengono con moltiplicare il riprodotto m.*^{simo} *di ciascuna risolvente di una data equazione, per la somma de' riprodotti*

ti n.simi di tutte le altre risolventi della medesima (1)

Soluzione. Posto

$$\left.\begin{array}{l} a^m(b^n + c^n + d^n \ldots + k^n) \\ + b^m(a^n + c^n + d^n \ldots + k^n) \\ + c^m(a^n + b^n + d^n \ldots + k^n) \\ \text{ec.} \quad \text{ec.} \end{array}\right\} = \int_{m,n}$$

dove a, b, c ec. k, sono le risolventi della proposta, risulta come si sa $\int_{m,n} = \int_{m} . \int_{n} - \int_{m+n}$

Facciasi

$$\left.\begin{array}{l} a^p(b^m c^n + b^n c^m + b^m d^n + b^n d^m \text{ ec.}) \\ + b^p(a^m c^n + a^n c^m + a^m d^n + a^n d^m \text{ ec}) \\ + c^p(a^m b^n + a^n b^m + a^m d^n + a^n d^m \text{ ec.}) \\ \text{ec.} \quad \text{ec.} \end{array}\right\} = \int_{m,n,p}$$

e siccome

$$\int_{m}\int_{n}\int_{p} = a^{m+n}(b^p + c^p + d^p \ldots + k^p)$$
$$+ b^{m+n}(a^p + c^p + d^p \ldots + k^p)$$
$$\text{ec.} \quad \text{ec.}$$
$$+ k^{m+n}(a^p + b^p + c^p \ldots + k_1{}^p)$$

... (k_1 è la penultima risolvente)

$$+ a^{m+p}(b^n + c^n + d^n \ldots + k^n)$$
$$+ b^{m+p}(a^n + c^n + d^n \ldots + k^n)$$
$$\text{ec.} \quad \text{ec.}$$
$$+ k^{m+p}(a^n + b^n + c^n \ldots + k_1{}^n)$$

$$+ a^{n+p}(b^m + c^m + d^m \ldots + k^m)$$
$$+ b^{n+p}(a^m + c^m + d^m \ldots + k^m)$$
$$\text{ec.} \quad \text{ec.}$$
$$+ k^{n+p}(a^m + b^m + c^m \ldots + k_1{}^m)$$

(1) Chiamo *risolvente* la radice di un' equazione, e *riprodotto* la potenza di una quantità. Questi vocaboli sono più espressivi: il primo si distingue meglio dalla radice di una quantità, ed il secondo esclude un vocabolo semibarbaro. Il celebre *Lagrange* con cui tenni proposito sul bisogno di alcune variazioni nella nomenclatura dell' Algebra, approvò le due precedenti, ed alcune altre ch' esporrò in breve in un corso di Algebra.

$$\left.\begin{array}{l} +a^p(b^mc^n + b^nc^m + b^md^n + b^nd^m \text{ ec.}) \\ +b^p(a^mc^n + a^nc^m + a^md^n + a^nd^m \text{ ec.}) \\ \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \\ +k^p(a^mb^n + a^nb^m + a^md^n + a^nd^m \text{ ec.}) \end{array}\right\}$$

$$+(a^{m+n+p} + b^{m+n+p} + c^{m+n+p} \text{ ec.})\ \Big\}$$

avvertendo che le cinque precedenti classi di termini sono respettivamente uguali ad

$$\int_{m+n}\int_{p} - \int_{m+n+p} \quad ; \int_{m+p}\int_{n} - s_{m+n+p} \quad ; \int_{n+p}\int_{m} - \int_{m+n+p} \quad ; \int_{m,n,p} \quad ; \int_{m+n+p}$$

si dedurrà

$$\int_{m}\int_{n}\int_{p} = \int_{m+n}\int_{p} + s_{m+p}\int_{n} + \int_{n+p}\int_{m} + s_{n+p}\int_{m} - 2\int_{m+n+p} + \int_{m,n,p}$$

e però

$$\int_{m,n,p} = \int_{m}\int_{n}\int_{p} - \int_{m+n}\int_{p} - \int_{m+p}\int_{n} - \int_{n+p}\int_{m} + 2\int_{m+n+p}$$

Ma $\int_{m}\int_{n} = \int_{m,n} + \int_{m+n}$

$$\int_{n}\int_{m+p} = \int_{n,m+p} + \int_{m+n+p}$$

$$\int_{m}\int_{n+p} = \int_{m,n+p} + \int_{m+n+p}$$

dunque $\int_{m,n,p} = \int_{m,n}\int_{p} - \int_{m,n+p} - \int_{n,m+p}$

Nella stessa maniera si trova

$$\int_{m,n,p,q} = \left\{\begin{array}{l} \int_{m}\int_{n}\int_{p}\int_{q} - \int_{p+q}\int_{m}\int_{n} - \int_{n+q}\int_{m}\int_{p} - \int_{m+q}\int_{n}\int_{p} \\ +\left(\int_{p+q} - \int_{p}\int_{q}\right)\int_{m+n} + \left(\int_{n+q} - \int_{n}\int_{q}\right)\int_{m+p} + \left(\int_{m+q} - \int_{m}\int_{q}\right)\int_{n+p} \\ +2\int_{u}\int_{m+p+q} + 2\int_{p}\int_{m+n+q} + 2\int_{m}\int_{n+p+q} \end{array}\right\} =$$

$$= \int_{q}\int_{m,n,p} - \int_{m,n,p+q} - \int_{m,p,n+q} - \int_{n,p,m+q}$$

In generale, senza ricorrere a delle nuove notazioni come altri ha fatto, si ha

$$\int_{m,n,p,q\ldots y,z,\omega} = \left\{\begin{array}{l} \int_{\omega}\int_{m,n,p,q\ldots z} - \int_{m,n,p\ldots z+\omega} - \int_{m,n,p\ldots y+\omega} \ldots\ldots \\ -\int_{m,n,q\ldots y,z,p+\omega} - \int_{m,p,q\ldots y,z,n+\omega} - \int_{n,p,q\ldots y,z,m+\omega} \end{array}\right.$$

3.°

3.° Problema. Trasformare un' equazione in un' altra, le di cui risolventi sieno le somme a due per due di quelle della proposta. Soluzione.

Essendo $x^m - px^{m-1} + qx^{m-2}$ ec. $= 0$ l' equazione proposta, il grado della trasformata è $= \frac{m(m-1)}{2}$, e posto $\frac{m(m-1)}{2} = n$, essa può mettersi sotto la forma seguente:

$y^n - p'y^{n-1} + q'y^{n-2} - r'y^{n-3}$ ec. $= 0$. Facciasi

$T_1 = a+b+a+c$ ec. $+b+c$ cc.

$T_2 = (a+b)^2+(a+c)^2$ ec. $+(b+c)^2$ ec.

$T_3 = (a+b)^3+(a+c)^3$ ec. $+(b+c)^3$ ec.

ec. ec. ec.

e si avrà

$T_1 = (m-1)p) = (m-1)s_1$

$T_2 = (m-1)(a^2+b^2$ ec.$)+2(ab+ac$ ec.$+bc$ ec.$) = (m-1)s_2 + 2q$

$= (m-2)s_2 + \frac{2}{2}s_1^2$

$T_3 = (m-1)(a^3+b^3$ ec.$)+3(a^2b+a^2c$ ec.$+b^2c$ ec.$+ab^2+ac^2$ ec.$+bc^2$ ec.$)$

$= (m-1)(a^3+b^3$ ec.$)+3(a+b$ ec.$)(a^2+b^2$ ec.$)-3(a^3+b^3$ ec.$)$

$= (m-4)s_3 + 3s_1 s_2$.

$T_4 = (m-1)(a^4+b^4$ ec.$)+4(a^3b+a^3c$ ec.$+b^3c$ ec.$+ab^3+ac^3$ ec.$+bc^3$ ec.$)$

$+6(a^2b^2+a^2c^2$ ec.$+b^2c^2$ ec.$) = (m-1)(a^4+b^4$ ec$)+4(a+b$ ec.$)(a^3+b^3$ ec.$)$

$-4(a^4+b^4$ ec.$)+\frac{6}{2}(a^2+b^2$ ec.$)^2-\frac{6}{2}(a^4+b^4$ ec.$) = (m-1)s_4 + 4s_1 s_3$

$-4s_4 + \frac{6}{2}(s_2^2 - s_4) = (m-8)s_4 + 4s_1 s_3 + \frac{6}{2}s_2^2$

$T_5 = (m-1)(a^5+b^5$ ec.$)+5(a^4b+a^4c$ ec.$+b^4c$ ec.$+ab^4$ ec$)$

$+10(a^3b^2+a^3c^2$ ec.$+b^3c^2$ ec.$+a^2b^3$ec.$) = (m-1)(a^5+b^5$ ec.$)$

$+5(a+b$ ec.$)(a^4+b^4$ ec.$)-5(a^5+b^5$ ec.$)+10(a^2+b^2$ ec.$)(a^3+b^3$ ec$)$

$-10(a^5+b^5$ ec.$) = (m-1)s_5 + 5s_1 s_4 - 5s_5 + 10s_2 s_3 - 10s_3$

$= (m-16)s_5 + 5s_1 s_4 + 10s_2 s_3$.

$T_6 = (m-1)(a^6+b^6$ cc.$)+6(a^5b+a^5c$ ec.$+15(a^4b^2$ ec.$+b^4c^2$ ec.$+a^2b^4$ ec.$)$

$+20(a^3b^3$ ec.$+b^3c^3$ cc.$) = (m-1)(a^6+b^6$ ec.$)+6(a+b$ ec.$)(a^5+b^5$ ec.$)$

$$-6(a^6+b^6\text{ec.})+15(a^2+b^2\text{ec.})(a^4+b^4\text{ec.})-15(a^6+b^6\text{ec.})$$
$$+\tfrac{20}{2}(a^3+b^3\text{ec.})^2-\tfrac{20}{2}(a^6+b^6\text{ec.})=(m-1)s_6+6s_1 s_5-6s_6$$
$$+15 s_2 s_4-15 s_6+\tfrac{20}{2}s_3^2-\tfrac{20}{2}s_6=(m-32)s_6+6s_1 s_5$$
$$+15 s_2 s_4+\tfrac{20}{2} s_3^2 .$$

In generale

$$T_{2\mu}=(m-2^{\mu 2-1})s_{2\mu}+2\mu s_1 s_{2\mu-1}+\frac{2\mu(2\mu-1)}{1\cdot 2}s_2 s_{2\mu-2}\ldots\ldots$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\frac{2\mu'2\mu-1)\ldots(2\mu-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu}\right]s_\mu\cdot s_\mu$$

$$T_{2\mu+1}=(m-2^{2\mu})s_{2\mu+1}+(2\mu+1)s_1 s_{2\mu}+\frac{(2\mu+1)2\mu}{1\cdot 2}s_2 s_{2\mu-1}\ldots\ldots$$
$$+\left[\frac{(2\mu+1)2\mu\ldots(2\mu-\nu+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu}\right]s_\mu\cdot s_{\mu+1}.$$

Ma $T_1=p'$, $T_2=p'^2-2q'$, $T_3=p'^3-3p'q'+3r'$, ec.; dunque

$$p'=(m-1)s_1$$
$$q'=\tfrac{1}{2}\left[(m-1)^2 s_1^2-[(m-2)s_2+s_1^2]\right]=\tfrac{1}{2}\left[m(m-2)s_1^2-(m-2)s_2\right]$$
$$r'=\tfrac{1}{2\cdot 3}\left[(m^3-3m^2+2)s_1^3-3(m^2-3m)s_1 s_2+2(m-4)s_3\right]$$

ec. ec. ec.

L' esposta soluzione ha il pregio di condurre alla formola generale di T_m; di dare immediatamente p', q', ec. espressi per delle funzioni abbastanza comode, quali sono s_1, s_2 ec., e di essere analoga alla nota soluzione del problema in cui si cerca, di trasformare un' equazione in un' altra, le di cui risolventi sieno le differenze di quelle della proposta. (2)

4.°

---

(2) *Nota dell' Autore sopraggiunta:* Abbiamo recentemente riscontrato nella Nota III alla *Risoluzione delle Equazioni Numeriche* di Lagrange, un' elegantissima dimostrazione generale della formola di T_m, tanto nel caso delle differenze, che delle somme a due per due delle risolventi.

4.° Problema. Si dimanda sen.$(a\pm b)$ e cos.$(a\pm b)$, espressi entrambi per li seni e coseni di a, b.

Soluzione. Qualunque debba essere l' espressione richiesta, è chiaro 1.° ch' ella debb' essere lineare; 2.° che non dee contenere alcun termine della forma $\frac{k}{\text{funz}(\text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \cos.a\ \cos.b\ \text{sen.}^2a\ \text{ec.})}$, qualunque sia il numero de' fattori del denominatore, perchè in una delle ipotesi, $a=0$, $a=100.°$, $b=0$, $b=100.°$, il termine di cui si tratta diviene infinito. 3.° che ogni termine dell' espressione di sen.$(a\pm b)$ debb' essere affetto da funz.sen.a, o da funz. sen.b, o da funz. (sen.a sen.b), perchè la supposizione di $a=0$, e $b=0$, fa svanire sen $(a\pm b)$. Ciò posto, l' unica forma che può darsi a sen.$(a+b)$ è

$$\text{M)}\ldots\text{sen.}(a+b)=\begin{cases} A\,\text{sen}\,a+B\,\text{sen.}b\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)\\ +\frac{1}{R}\begin{cases} C\,\text{sen.}^2a+D\,\text{sen.}^2b+E\,\text{sen.}a\ \text{sen.}b+F\,\text{sen.}a\cos.b\\ \quad +G\,\text{sen.}b\cos a+H\,\text{sen.}a\cos.a+I\,\text{sen.}b\cos.b\ldots(\beta)\end{cases}\\ +\frac{1}{R^2}\begin{cases} P\,\text{sen.}^2a\cos.b+Q\,\text{sen.}^2b\cos.a+P'\,\text{sen.}a\cos.^2b\\ \quad +Q'\,\text{sen.}b\cos.^2a+P''\,\text{sen.}\,a\,\text{sen.}b\\ \quad +Q''\,\text{sen.}^2b\,\text{sen.}a+T\,\text{sen.}^3a\ \ldots\ldots\ (\gamma)\end{cases}\\ \text{ec.}\quad\text{ec.}\quad\text{ec.}\quad\text{ec.}\end{cases}$$

dove R è il raggio $=1$.

Quando $b=0$ si ha sen.$(a+b)=$sen.a; e quando $a=0$, sen.$(a+b)$ $=$ sen.b. La prima ipotesi dà $C=0$, ed $H=0$; la seconda $D=0$, $I=0$; ed entrambe $P=0$, $Q=0$, $T=0$. Dunque l' espressione (M) dee ridursi a

$$\text{(N)}\ldots\text{sen.}(a+b)=\begin{cases} A\,\text{sen.}a+B\,\text{sen.}b\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)\\ +\frac{1}{R}\begin{cases} E\,\text{sen.}a\ \text{sen.}b+F\,\text{sen.}a\cos.b+G\,\text{sen.}b\cos.a\ \ldots\ (\beta)\end{cases}\\ +\frac{1}{R^2}\begin{cases} P'\,\text{sen.}a\cos.^2b+Q'\,\text{sen.}b\cos.^2a+P''\,\text{sen.}^2a\,\text{sen.}b\\ \quad +Q''\,\text{sen.}^2b\,\text{sen.}a\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\gamma)\end{cases}\\ \text{ec.}\quad\text{ec.}\quad\text{ec.}\end{cases}$$

Ma quando $a=100.°$ risulta sen.$(a+b)=\cos.b$, e l' espressione (N) diviene

$$\text{sen.}(a+b)=A+(B+\tfrac{E}{R}+\tfrac{P'}{R^2})\,\text{sen.}b+F\cos.b+\tfrac{1}{R^2}(P'\cos.^2b+Q''\text{sen.}^2b)+\text{ec.}$$

dunque $A=0$, $B+E+P''=0$, $F=1$, $P'=0$, $Q''=0$ e però (P)

$$(P)\ldots \operatorname{sen.}(a+b)=\begin{cases} B\operatorname{sen.}b+\frac{1}{R}\Big(E\operatorname{sen.}a\operatorname{sen.}b+\operatorname{sen.}a\cos.b+G\operatorname{sen.}b\cos.a \\ \quad +\frac{1}{R^2}\Big(Q'\operatorname{sen.}b\cos.^2a+P''\operatorname{sen.}^2a\cos.b\Big) \\ \quad +\quad \text{ec.}\quad \text{ec.} \end{cases}$$

Quando $b=100.^\circ$ deesi avere $\operatorname{sen.}(a+b)=\cos.a$, e perchè l'espressione (P) si cangia in

$$\operatorname{sen.}(a+b)=B+\frac{1}{R}\Big(E\operatorname{sen.}a+G\cos.a\Big)+\frac{1}{R^2}\Big(Q'\cos.^2a+P''\operatorname{sen.}^2a\Big)+\text{ec.}$$

ne segue $B=0$, $E=0$, $G=1$, $Q'=0$, $P''=0$.

Combinando i risultati delle ipotesi precedenti, siccome svaniscono tutti i termini della serie (γ) e delle susseguenti, si può concludere $\operatorname{sen.}(a+b)=\frac{1}{R}\Big(\operatorname{sen.}a\cos.b+\operatorname{sen.}b\cos.a\Big)\ldots$ (A), quindi $\cos.(a+b)[=\sqrt{(1-\operatorname{sen.}^2(a+b)}]=\sqrt{[1-(\operatorname{sen.}^2a\cos.^2b-2\operatorname{sen.}a\cos.a\times \operatorname{sen.}b\cos.b+\operatorname{sen.}^2b\cos.^2a)]}$

e posto $1-\cos.^2a$ per $\operatorname{sen.}^2a$, $1-\operatorname{sen.}^2a$ per $\cos.^2a$,

$$\cos.(a+b)=\pm\frac{1}{R}(\cos.a\cos.b-\operatorname{sen.}a\operatorname{sen.}b)\ldots(B).$$

Siccome $\operatorname{sen.}-b=-\operatorname{sen.}b$ e $\cos.-b=\cos.b$, ponendo $-b$ per b in (A), (B) si ottiene

$\operatorname{sen.}(a-b)=\operatorname{sen.}a\cos.b-\operatorname{sen.}b\cos.a$

$\cos.(a-b)=\pm(\cos.a\cos.b+\operatorname{sen.}a\operatorname{sen.}b)$: dunque

$\operatorname{sen.}(a\pm b)=\operatorname{sen.}a\cos.b\pm\operatorname{sen.}b\cos.a$

$\cos.(a\pm b)=\pm(\cos.a\cos.b\mp\operatorname{sen.}a\operatorname{sen.}b)$

Noi non conosciamo veruna soluzione del problema precedente, che sia puramente algebrica, e non dipenda dalla risoluzione de' triangoli; risoluzione che assolutamente appartiene all' ultima parte della Trigonometria. La soluzione ch' è stata derivata dall' integrale dell' equazione $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}=0$ non può essere di alcun uso.

5.° Essendo a, b, c, tre angoli tali che sia $a+b+c=200.^\circ$, risulta: $\operatorname{sen.}a\cos.c+\operatorname{sen.}c\cos.a[=\operatorname{sen.}(a+c)]=\operatorname{sen.}b$; quindi $\operatorname{sen.}b-\cos.a\operatorname{sen.}c=\operatorname{sen.}a\cos.c$.

Si

Si ha pure $\cos.a\cos.c - \text{sen.}a\,\text{sen.}c\,[=\cos(a+c)] = -\cos.b$, e perciò $\cos.a\cos.c + \cos.b = \text{sen.}a\,\text{sen.}c$.

Dividendo il primo de' risultati precedenti pel secondo ne proviene $\frac{\cos.a\cos.c+\cos.b}{\text{sen.}b-\cos.a\,\text{sen.}c} = \tan.c$.

Nell' ipotesi che sia $a+b+c=200.^{\circ}$ sussiste l'equazione $\text{sen.}^2b - \text{sen.}^2c = \text{sen.}(b+c)\text{sen.}(b-c)$. Infatti ponendo a per $b+c$ l'equazione precedente diviene

$\text{sen.}b(\text{sen.}b - \text{sen.}a\cos.c) = \text{sen.}c(\text{sen.}c - \text{sen.}a\cos.b)$;

ma $\text{sen.}a\cos.c = \text{sen.}b - \cos.a\,\text{sen.}c$

$\text{sen.}a\cos.b = \text{sen.}c - \cos.a\,\text{sen.}b$

dunque ec.

Sieno due angoli b, c, tali che $b+c < 200.^{\circ}$, e sieno x, y, i rispettivi complementi di b, c. Si avrà $x = 100.^{\circ} - b$, $y = 100.^{\circ} - c$, e però $y-x=b-c$; e se $b>100^{\circ}$; $y+x=b-c$; dunque $b-c=y\mp x$. Si ha parimente $y+x = 200.^{\circ} - (b+c)$; quindi $y+x$ è il supplemento di $b+c$, ed $\frac{1}{2}(y+x)$ il complemento di $\frac{1}{2}(b+c)$; perciò $\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c) = \cos.\frac{1}{2}(y+x)$, e $\tan.\frac{1}{2}(b+c) = \cot.\frac{1}{2}(y+x)$. I risultati di questo paragrafo ci saranno utili.

Accenniamo di passaggio che dalle note formole di $\text{sen.}na$, $\cos.na$, può dedursi la seguente formola generale

$$\text{sen.}na\cos.na = n\,\text{sen.}a - \frac{n}{2.3}(4n^2-1)\text{sen.}^3a + \frac{n}{2.3.4.5}(4n^2-1)(4n^2-9)\text{sen.}^5a - \frac{n}{2.3.4.5.6.7}(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)\text{sen.}^7a \text{ ec.}$$

la di cui legge è manifesta; e che mediante l' equazioni

$\text{sen.}a = 2\text{sen.}\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}a$

$\text{sen.}2a = 2\text{sen.}a\cos.a$

$\text{sen.}3a = 2\text{sen.}\frac{3}{2}a\cos.\frac{3}{2}a$

. . . . . .

$\text{sen.}na = 2\text{sen.}\frac{n}{2}a\cos.\frac{n}{2}a$

sen.

$\text{sen.}a+\text{sen.}2a+\text{sen.}3a$ cc. $=\frac{1}{2}\text{cot.}\frac{1}{2}a$

si ottiene

$\text{sen.}\frac{1}{2}a\ \text{cos.}\frac{1}{2}a+\text{sen.}a\ \text{cos.}a+\text{sen.}\frac{3}{2}a\ \text{cos.}\frac{3}{2}a+\text{sen.}2a\ \text{cos.}2a$ ec. ec.

$=\frac{1}{4}\text{cot.}\frac{1}{2}a$,

Passiamo adesso a mostrare che la risoluzione de' triangoli presa in tutta la sua estensione , può derivarsi per analisi dal risultato del seguente problema semplicissimo .

6. Problema. Si dimanda il rapporto che i seni degli angoli di un triangolo rettilineo hanno coi lati opposti .

Soluzione. Premessa la formazione analitica delle Tavole , si vede che il seno di un angolo vien espresso in parti del raggio, e che variando questi, non l'angolo , il seno dee comprendere lo stesso numero di parti del raggio . Sieno A. B, C, i lati di un triangolo , a, b, c gli angoli respettivamente opposti , e pongasi $a=100.^{\circ}$ Avremo

A(=sen.$100.^{\circ}=r$) : B(=sen b nell'ipot. del rag.r) : : R : sen.b, nell' ipot. del raggio tabulare R ; ovvero

A (ipoten.) : B (cateto) : : R : sen.b.

Si concepisca un secondo triangolo rettangolo , avente il cateto B comune col triangolo precedente, ed il secondo cateto C' sul prolungamento del cateto C . Chiamando A' l' ipotenusa del secondo triangolo , e b' l' angolo compreso fra i lati A', C', si avrà

A' : B : : R : sen.b'; dunque Asen.b = A'sen.b' . . . (D)

e perciò i *seni degli angoli stanno come i lati opposti* . .

La formola (D) risolve un triangolo 1.° quando si hanno *due lati ed un angolo opposto ad uno di essi ;* 2.° quando si ha *un lato e due angoli* .

7.° L' equazioni B sen.a = Asen.b, C sen.a = A sen.c danno

$$(B+C)\text{sen.}a = A\ (\text{sen.}b+\text{sen.}c)$$
$$(B-C)\text{sen.}a = A\ (\text{sen.}b-\text{sen.}c)$$

e quindi

$$\frac{B+C}{B-C} = \frac{\text{sen.}b+\text{sen.}c}{\text{sen.}b-\text{sen.}c} = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(b+c)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(b-c)} \quad . \ . \ . \ (E)$$

for-

formola che risolve un triangolo quando si conoscono *due lati e l' angolo compreso:* essa però lo risolve anche in due altri casi che derivano dal precedente, cioè 1.° quando si hanno *due lati e la somma o la differenza degli angoli opposti*; 2.° quando si hanno *due angoli e la somma o la differenza de' lati opposti.*

Volendo immediatamente uno degli angoli b, c, dicasi

$$B : C :: \text{sen.}b : \text{sen.}[200.^{\circ}-(a+b)]$$

cioè $B : C :: \text{sen.}b : \text{sen.}(a+b)$ e si avrà

$$\text{sen.}b = \frac{B\ \text{sen.}a}{\sqrt{(B^2+C^2-2B.C\cos.a)}}$$

Deducendo cos.b, si trova $\tan.b = \dfrac{B\ \text{sen.}a}{\frac{C}{B} - B\cos.a} = \dfrac{\tan.a}{\frac{C}{B}\cdot\frac{1}{\cos.a} - 1}$

formola in altra guisa ottenuta dal Chiarissimo Professor Cagnoli, e che dà un secondo angolo, se abbiasi *un angolo ed il rapporto de' lati che lo comprendono*. Può dunque costruirsi per mezzo di essa un triangolo simile al triangolo proposto.

Fatto $a = 100.^{\circ}$ essa dà inoltre $\tan.b = \frac{B}{C}$: sta dunque *un cateto all' altro come il raggio alla tangente dell' angolo opposto al secondo cateto.*

8.° Mettendo la precedente espressione di sen.b nell' equazione A sen.b=B sen.a, si ottiene $A=\sqrt{(B^2+C^2-2B.C\cos.a)}$. Conoscendo A, C, b, si trova come sopra $\text{sen.}c = \dfrac{C\ \text{sen.}b}{\sqrt{(A^2+C^2-2A.C\cos.b)^2}}$ e posto questo valore nell' equazione B sen.c = C sen.b risulta $B = \sqrt{(A^2+C^2-2A.C\cos.b)}$. Nello stesso modo si trova $C=\sqrt{(A^2+B^2-2A.B\cos.c)}$. Quadrando le respettive espressioni di A, B, C, si ha

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= B^2+C^2-2B.C\cos.a \\ B^2 &= A^2+C^2-2A.C\cos.b \\ C^2 &= A^2+B^2-2A.B\cos.c \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (K)$$

formole che si ottengono anche mediante l' equazioni A sen.b = Bsen.a, A sen.$[200.^{\circ}-(a+b)]$ = C sen.a, e che danno

gli angoli per mezzo de' lati. Esse divengono più comode se vi si sostituisca $1-2\text{sen.}^2\frac{1}{2}$ per cos., e deducasi sen. $\frac{1}{2}$. (1)

9.° Problema. Trovare i semmenti x, y, di un angolo a, fatti dalla perpendicolare da esso calata sul lato opposto e trovare i semmenti di questo lato.

Soluzione. Posto nella formola (E) num°. 7.°, $\tan.\frac{1}{2}(y\mp x)$ per $\tan.\frac{1}{2}(b-c)$ (n.° 5.°) e $\cot.\frac{1}{2}(y+x)$, $=\cot.\frac{1}{2}a$ per $\tan.\frac{1}{2}(b+c)$, risulta $\tan.\frac{1}{2}(y\mp x)=\frac{B-C}{B+C}\cot.\frac{1}{2}(y+x)$ $=\frac{\tan.\frac{1}{2}(b-c)}{\tan.\frac{1}{2}(b+c)}\cot.\frac{1}{2}(y+x)$; e perchè $x+y=a$, si hanno subito i semmenti x, y, per mezzo de' lati che comprendono l'angolo a, e per mezzo de' soli angoli. Sia C' il semmento del lato A dalla parte dell'angolo c, e B' l'altro semmento. Si ha $B^2-B'^2=C^2-C'^2\ (=\delta^2)$, quindi $B'-C'=\frac{(B+C)(B-C)}{B+C}$, e posto $\frac{A\,\text{sen.}b}{\text{sen.}a}$ per B, $\frac{A\text{sen.}c}{\text{sen.}a}$ per C, $B'-C'=\frac{A(\text{sen.}^2b-\text{sen.}^2c)}{\text{sen.}^2a}=\frac{A\text{sen.}(b-c)}{\text{sen}\,a}$ (n.° 5.°), se la perpendicolare δ cade fuori del triangolo, è $A=B'-C'$ e però $B'+C'=\frac{(B+C)(B-C)}{B'-C'}=\frac{A\text{sen.}(b-c)}{\text{sen.}a}$; dunque $B'\pm C'=\frac{A\text{sen}\,(b-c)}{\text{sen.}a}$. Se $a=100.°$ è sempre $A=B'+C'$, e si ha $B'-C'=A\text{sen.}(b-c)$; dun-

(a) Evvi chi ha ottenute le formole (K) coi lumi dell'applicazione dell'Algebra alla Geometria, supponendo note le coordinate de' vertici del triangolo, e perciò nota la risoluzione de' triangoli rettangoli, operazione molto prolissa e non adattabile alla Trigonometria: altri le ha trovate mediante la proprietà di un triangolo obbliquangolo ABC, che sia cioè $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\pm 2\overline{BC}\cdot\overline{CD}$, operazione che richiede l'abbassamento di una perpendicolare CD, e che troppo dipende dalla Geometria: altri le ha rintracciate col soccorso di alcune preparazioni sintetiche, mediante la proprietà che hanno le seganti del circolo, condotte da uno stesso punto esterno. Niuno poi, per quanto io sappia, ha fatto delle formole (K) quell'uso amplissimo che delle medesime si può fare, come si vedrà in appresso.

dunque *sta l'ipotenusa al raggio, come la differenza de' semmenti al seno della differenza degli angoli acuti.*

10.° Facendo girare la retta δ intorno al vertice a, finchè giunga al punto di mezzo del lato A, risulta il semmento maggiore y, diviene $y-p=y'$, il minore x diviene $x+p=x'$ e si ha, chiamando δ' la retta in cui si cangia la δ,

(δ' : B' : : sen.b : sen.x'; δ' : C' : : sen.c : sen.y')...(Q);

ma B'=C': dunque sen.x' : sen.y' : : sen.b : sen.c : : B : C e però

B+C:B—C::sen.y'+sen.x':sen.y'—sen.x'::tan.$\frac{1}{2}(y'+x')$:tan.$\frac{1}{2}(y'-x')$:

quindi tan.$\frac{1}{2}(y'-x') = \text{tan.}\frac{1}{2}(y'+x')\frac{B-C}{B+C}$, formola che dà i semmenti x', y' per mezzo dell' angolo diviso a e de' lati che lo comprendono.

Si ha pure tan.$\frac{1}{2}(y'-x') = \text{tan.}\frac{1}{2}(y'+x')\frac{\text{tsn.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{tan.}\frac{1}{2}(b+c)}$, laonde i semmenti si ottengono per mezzo de' soli angoli. Quest' ultima formola ci dà un teorema elegante ed è: che se dividesi un angolo a di un triangolo, con una retta tendente alla metà del lato opposto A, *sta la tangente della semisomma degli angoli* b, c, *adiacenti ad* A, *alla tangente della semidifferenza de' medesimi angoli, come la tangente della semisomma de' semmenti dell' angolo a sta alla tangente della semidifferenza degli stessi semmenti.*

11.° Facendo girare come sopra la retta δ finchè giunga a dividere in mezzo l'angolo a, risulta $x'=y'$ e le proporzioni (Q) danno

B': C': : sen.b : sen.c; quindi B'—C' $= \frac{\text{A tan.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{tan.}\frac{1}{2}(b+c)} = \frac{A(B-C)}{B+C}$.

La proporzione precedente dà pure B'sen.c = C'sen.b; ma B'=A$\mp$C': dunque C' $= \frac{A\text{sen.}c}{\text{sen.}b \pm \text{sen.}c}$ e B' $= \frac{A\text{sen.}b}{\text{sen.}b \pm \text{sen.}c}$

Le proporzioni (Q) danno parimente

$\tan.\frac{1}{2}(y'-x') = \tan.\frac{1}{2}a\left(\frac{C'\text{sen}.b-B'\text{sen}.c}{C'\text{sen}.b+B'\text{sen}.c}\right)$, formola che somministra i semmenti y', x', qualunque sia il rapporto dato de' semmenti B', C'; e che somministra B', C', qualunque sia il rapporto dato de' semmenti x', y'. Ella serve dunque a generalizzare il problema del n.° 10.° .

12.° Sommando a due per due l' equazioni (K) (n.° 8.°) e togliendo i fattori comuni si ha

$$(h)\ \ldots\ \begin{cases} C - A\cos.b - B\cos.a = 0 \\ A - C\cos.b - B\cos.c = 0 \\ B - C\cos.a - A\cos.c = 0 \end{cases}$$

equazioni importantissime nella soluzione de' problemi relativi alla risoluzione de' triangoli piani . Se $a=100.°$ esse divengono

$$(i)\ \ldots\ \begin{cases} C - A\cos.b = 0 \\ A - C\cos.b - B\cos.c = 0 \\ B - A\cos.c = 0 \end{cases}$$

e riescono comodissime quando si tratta di triangoli rettangoli .

13.° La prima e la terza insegnano che l' *ipotenusa sta ad un cateto , come il raggio al seno dell' angolo opposto al cateto* . Posto sen.c per cos.b , e divisa la prima per la terza , si ha $\tan.c = \frac{C}{B}$, formola che riconduce al teorema posto sul fine del n.°7.° Essa insegna 1.°a trovare la perpendicolare δ, quando si conosce il lato A su cui cade, e gli angoli ad esso adiacenti , b , c ; 2.° a trovare il rapporto de' semmenti B',C' per mezzo de' soli angoli b , c. Si hanno infatti le proporzioni

$B' : \delta :: 1 : \tan.b$; $A - B'(=C') : \delta :: 1 : \tan.c$, da cui $\delta = \frac{A\tan.b.\tan.c}{\tan.b + \tan.c}$ e $B' : C' :: \tan.c : \tan.b$. Se $a = 100.°$ si ha $\delta = \frac{A\tan.b}{\text{seg.}^2 b}$; poi $B' : C' :: 1 : \tan.^2 b$, e se $B' > C'$ risulta $1 > \tan.b$, $b < 50.°$ e $b < c$: sta dunque *il semmento maggiore al minore come il raggio al quadrato della tangente dell' angolo minore* .

14.°

14.° Le formole (*i*) porgono con semplicità la soluzione di molti problemi: tali sono i seguenti. I *Dato un angolo acuto e la superficie*. II *Dato un angolo acuto e la somma o la differenza di due lati*. III *Data l' ipotenusa, e la somma o la differenza de' cateti*. IV *Dato un cateto e la somma o la differenza dell' ipotenusa e del secondo cateto*. V *Dato il perimetro e due angoli*, risolvere in ciascuno di questi casi il triangolo. Noi però stimiamo bene di dedurne la soluzione da problemi più generali, a riserva del primo, la di cui deduzione sarebbe meno comoda.

15.° Problema. Risolvere un triangolo rettangolo, di cui sia dato un angolo acuto b, e la superficie s.

Soluzione. Essendo A l' ipotenusa risulta $BC=2s$ e però $B=\frac{2s}{c}$. La terza equazione (*i*) diviene $\frac{2s}{c}-A\,\text{sen.}b=0$; ma la prima dà $C=A\cos.b$; dunque $2s-A^2\text{sen.}b\cos.b=0$, e però

$$A=\sqrt{\frac{2s}{\text{sen.}b\cos.b}}=2\sqrt{\frac{Rs}{\text{sen.}2b}}\,.$$

16.° Problema. Dati due angoli a, b, ed $A\mp C=m$, risolvere il triangolo.

Soluzione. Dalle prime due dell' equazioni (*h*) si deduce $B=\frac{A\mp C-(C\mp A)\cos.b}{\cos.c\mp\cos.a}$. Dato

$A-C=m$ risulta $\quad B=\frac{m(1+\cos.b)}{\cos.c-\cos.a}$

e dato $A+C=m$ $\quad B=\frac{m(1-\cos.b)}{\cos.c+\cos.a}$.

La prima formola per essere $1+\cos.b=\frac{\text{sen.}b}{\text{tan.}\frac{1}{2}b}$ e $c=200.°-(a+b)$,

si cangia in $$B=\frac{m}{\text{sen.}a\,\text{tan.}\frac{1}{2}b-\cos.a}\quad\ldots\ldots\quad(l)$$

La seconda perchè $1-\cos.b=\text{sen.}b\,\text{tan.}\frac{1}{2}b$ diviene

$$B=\frac{m\,\text{tan.}\frac{1}{2}b}{\text{sen.}a+\cos.a\,\text{tan.}\frac{1}{2}b}\quad\ldots\ldots\quad(m)$$

Se $a=100.°$ le due formole precedenti danno

$B=$

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{m}{\text{tan.}\frac{1}{2}b} = m\,\text{tan.}\frac{1}{2}c \\ B &= m\,\text{tan.}\frac{1}{2}b = \frac{m}{\text{tan.}\frac{1}{2}c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (n)$$

e se $b = 100.^{\circ}$ danno $\quad B = \frac{m}{\text{sen.}a - \cos.a} = \frac{m}{\text{sen.}(c-50.^{\circ})\sqrt{2}} \quad \ldots (p)$

$$B = \frac{m}{\text{sen.}a + \cos.a} = \frac{m}{\text{sen.}(c+50.^{\circ})\sqrt{2}} \quad \ldots (q)$$

17.° Problema. Dato un angolo b, il lato opposto B ed $A \mp C = m$, risolvere il triangolo.

Soluzione. Siccome fra i dati del problema v' è un solo angolo b, giova impiegare per maggior semplicità la prima dell' equazioni (k). Posto per A, $m \pm C$ essa dà

$C = \frac{1}{2}\left(\mp m \pm \sqrt{\frac{(2B^2 - m^2(1+\cos.b)}{1-\cos.b}}\right)$, formola che altri ottenne colla combinazione di undici formole particolari, non tutte semplici.

Se $b = 100.^{\circ}$ si ha $C = \frac{\pm m \pm \sqrt{2b^2 - m^2}}{2}$, formola che scioglie il problema III del n.° 14. Se conoscesi $A + C = m$, convien prendere m positivo, ed in questo caso i dati del problema equivalgono al perimetro, l' angolo b, ed il lato B. Alla formola

$C = \frac{1}{2}\left[m \pm \sqrt{\frac{2B^2 - m^2(1+\cos.b)}{1-\cos b}}\right]$ si riduce la risoluzione di un triangolo, di cui venga dato un angolo b, il perimetro m e la superficie n^2, perchè può trovarsene il lato B (Newton Arith. Univ. prob. VIII). Quest' ultimo problema può sciogliersi però anche più generalmente, nell' ipotesi cioè che si cerchi un lato qualunque. Infatti dall' equazioni (k) o (h) si possono eliminare due lati mediante l' equazioni $m = A+B+C$, $n^2 = \frac{A.C\,\text{sen.}b}{2}$. Il Sig. Cagnoli (Soc. Ital. t. VII.) ha sciolto il problema di Newton colla massima semplicità per mezzo di un artifizio ingegnoso.

18.° Problema. È dato un angolo b, un lato adiacente A e $B = C = m$. Soluzione.

Po-

Posto $m \pm C$ per B nelle formole (h) esse divengono

$$C - A\cos.b - (m \pm C)\cos.a = 0$$
$$A - C\cos.b - (m \pm C)\cos.c = 0$$
$$m \pm C - C\cos.a - A\,.\,\cos.c = 0$$

Eliminato cos.c dall' ultime due, si ottiene

$$A^2 - A.C\cos.b = (m \pm C)^2 - (m \pm C)C\cos.a \text{ ; quindi}$$

$$\cos.a = \frac{-A^2 + A.C\cos.b + (m \pm C)^2}{(m \pm C)C}$$

la prima equazione (h) diviene

$$C^2 - 2A.C\cos.b + A^2 - (m \pm C)^2 = 0 \text{ , cioè}$$
$$A^2 - 2A.C\cos.b - m^2 \mp 2m\,C = 0 \text{ ; onde}$$

$$C = \frac{A^2 - m^2}{2\,(A\cos.b \pm m)}$$

formola altrimenti ottenuta dal Sig. Cagnoli (*Memoria citata*) . Essa diviene $C = \frac{A^2 - m^2}{\pm 2m}$ se $b = 100.^{\circ}$, e risolve il probl. IV del §. 14.

19.° Problema. Risolvere un triangolo di cui sono dati gli angoli ed il perimetro m .

Soluzione . Essendo $C = m - A - B$, l' equazioni (h) divengono

$$m - A - B - A\cos.b - B\cos.a = 0$$
$$A - (m - A - B)\cos.b - B\cos.c = 0$$
$$B - (m - A - B)\cos.a - A\cos.c = 0$$

Dalla terza $B = \frac{A\cos.c + (m - A)\cos.a}{1 + \cos.a}$, onde la prima si cangia in

$$m - A - \left(\frac{A\cos.C + (m - A)\cos.a}{1 + \cos.a}\right) - A\cos.b - \left(\frac{A\cos.c + (m - A)\cos.a}{1 + \cos.a}\right)\cos.a = 0$$

Quindi $A = \frac{m\,\mathrm{sen}^2.a}{1 + \cos.c + \cos.b\,(1 + \cos.a) - \cos.a\,(\cos.c - \cos.a)} =$

$$\frac{m\,\mathrm{sen}^2.a}{1 - \cos.^2 a + (\cos.a\,\cos.b + \cos.c) + (\cos.a\,\cos. + \cos.b)} = \frac{m\,\mathrm{sen}.a}{\mathrm{sen}.a + \mathrm{sen}.b + \mathrm{sen}.c} .$$

Questa formola si ottien subito con un facile artifizio componendo cioè le ragioni , A : sen a : : B : sen b : : C : sen.c , ma la nostra soluzione è più analitica , il nostro metodo uniforme .

Se

Se $a = 100.^{\circ}$ risulta l' ipotenusa $A = \frac{m}{1+\text{sen.}b+\text{cot.}b}$, formola che scioglie il problema V del n.° 14.

20.° Problema. Sono dati b, B ed $\frac{A}{C} = m$.

Soluzione. Posto mC per A la prima dell' equazioni (k) dà $C = \frac{B}{\sqrt{(1+m^2-2m\cos.b)}}$ e se $b = 100.^{\circ}$, $C = \frac{B}{\sqrt{(1+m^2)}}$. Avendo B, a ed $\frac{A}{C} = m$, la seconda equazione (k) dà $C = -\frac{B}{m^2-1}\left[\cos.a \mp \sqrt{m^2-\text{sen.}^2 a}\right.$

e se $a = 100.^{\circ}$, $C = \pm\frac{B}{\sqrt{(m^2-1)}}$.

21.° Problema. Sono dati B, b ed A.C$=m$.

Soluzione. La prima equazione (k) dà

$$C = \sqrt{\left[m\cos.b + \frac{B^2}{2} \pm \sqrt{\left(-m^2\text{sen.}^2 b + m\cos.b \cdot B^2 + \frac{B^4}{4}\right)}\right]}$$

e se $b = 100.^{\circ}$, $C = \frac{\sqrt{(B^2 \pm \sqrt{B^4-4m^2})}}{2}$.

Con diverso metodo il Sig. Cagnoli ha trovato

$$C = \tfrac{1}{2}\sqrt{(B^2+4m\cos.^2\tfrac{1}{2}b)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(B^2-4m\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}b)}.$$

22.° Problema. Dati A, B, ed $a \mp b = m$, trovar gli angoli.

Soluzione. Posto $a = m \pm b$ nell'equazioni (h), si ha eliminando cos.c dall' ultime due, $A^2 - A.C\cos.b = B^2 - B.C\cos.(m \pm b)$; ma la prima dà $C = A\cos.b + B\cos.(m \pm b)$; dunque A. sen.$b$ = Bsen.$(m \pm b)$ e però $\text{sen.}b = \frac{B\,\text{sen.}m}{\sqrt{(A^2 \mp 2A.B\cos.m + B^2)}}$.

Sovente riesce più comodo servirsi della formala (D) n.° 6.° in vece dell' equazioni (k), (h).

23.° Problema. È data la perpendicolare δ, la differenza μ de' semmenti della base, e la somma o la differenza m de' lati, dal cui angolo scende la perpendicolare.

Soluzione. Sia B il lato minore, il semmento minore B', e l' angolo acuto adiacente al secondo semmento C' $(= B' + \mu)$.

Sic-

Siccome (n°. 6.°) $B : \delta :: 1 : \text{sen.}b = \frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2+B'^2)}}$

$$m \pm B : \delta :: 1 : \text{sen.}c = \frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2+(B'+\mu)^2)}}$$

ne segue $\sqrt{(\delta^2+B'^2)}=\sqrt{(\delta^2+(B'+\mu)^2)}-m$, e però $B'= -\frac{1}{2}\left(\mu \pm m\sqrt{\left(\frac{4\delta^2+\mu^2-m^2}{\mu^2-m^2}\right)}\right)$. Dunque la base $= 2B' + \mu = m\sqrt{\left(\frac{4\delta^2+\mu^2-m^2}{\mu^2-m^2}\right)}$. Se $\mu = m$ ella diviene infinita, e però la differenza de' semmenti non può esser eguale alla differenza de' lati. Date tre delle quantità δ, μ, m, x, può dunque aversi la quarta.

24.° Problema. Sono dati A, b e la superficie s. Soluzione. Si ha $\delta = \frac{2f}{A}$, poi $C : \frac{2f}{A} :: 1 : \text{sen.}b$, e però $C = \frac{2f}{A\,\text{sen.}b}$.

25.° Eliminando A, B, C, per mezzo dell' equazioni (h). siccome son esse prive di un termine cognito, si trova zero per risultato: l' analisi dunque dimostra che il problema in cui si cercano i lati per mezzo degli angoli è di sua natura indeterminato. Facendo $\frac{A}{C} = m$, $\frac{B}{C} = n$, l' equazioni (h) divengono

$$1 - m\cos.b - n\cos.a = 0$$
$$m - \cos.b - n\cos.c = 0$$
$$n - \cos.a - m\cos.c = 0$$

e danno i rapporti de' lati. Resta un' equazione di condizione, cioè $1 - \cos.^2a - \cos.^2b - \cos.^2c - 2\cos.a\cos.b\cos.c = 0$, che equivale a $-\cos[200.° - (b+c)] = \cos.a$, ed esprime che $a+b+c = 200.°$ In generale, mediante le formole (k) o (h) si può risolvere un triangolo, qualora sieno date tre equazioni atte a determinare tre elementi fra' quali un lato, ancorchè tali equazioni non contengano gli elementi stessi ma delle funzioni che da essi dipendano, come la superficie del triangolo, le perpendicolari calate dai vertici su i lati opposti, le rette che dai vertici vanno alla metà de' lati opposti, ec. Infatti, essendo $\alpha, \beta, \gamma,$

γ, queste rette, A, B, C, i rispettivi lati che dalle medesime s' incontrano, si hanno l' equazioni

$$4\alpha^2 = 2B^2 + 2C^2 - A^2$$
$$4\beta^2 = 2C^2 + 2A^2 - B^2$$
$$4\gamma^2 = 2A^2 + 2B^2 - C^2$$

In ogni caso la difficoltà si riduce a trovar delle formole semplici e comode nella pratica (*) .

26. Problema. Dato un angolo a di un triangolo bac, la cui base A ($= bc$) sia orizzontale, ed i lati B, C, obliqui all'orizzonte, e dati gli angoli di depressione α, β, che i lati B, C fanno colla verticale D calata dal vertice a, determinare l' angolo x, uguale alla projezione dell' angolo a sul piano orizzontale che passa per A.

Soluzione. Chiamando B', C', i lati che nel triangolo projettato comprendono l' angolo x si ha (n.° 8.°) .

$A^2 = B^2 + C^2 - 2B.C\cos.a = B'^2 + C'^2 - 2B'.C'\cos.x$

I lati B', C', essendo corde di circoli massimi della sfera terrestre, gli angoli che nella loro intersezione fanno colla verticale D, superano 100.° della metà dell'arco sotteso dal rispettivo lato B', C'. Trascurati questi archi, che in pratica sono estremamente piccoli, risulta $B^2 - B'^2 = D^2$, $C^2 - C'^2 = D^2$; quindi $\cos.x = \frac{B.C\cos.a - D^2}{B'.C'}$; ma $B = \frac{B'}{\text{sen.}\alpha}$, $C = \frac{C'}{\text{sen.}\beta}$, $D = B'\cot.\alpha = C'\cot.\beta$; dunque mettendo $B'.C'\cot.\alpha\cot.\beta$ in luogo di D^2, si ha $\cos.x = \frac{\cos a - \cos.\alpha\cos.\beta}{\text{sen.}\alpha\,\text{sen.}\beta}$ ...(s) ovvero $\cos.x = \frac{\cos.a - \text{sen.compl.}\alpha\,\text{sen.compl.}\beta}{\text{cos.compl.}\alpha\,\text{cos.compl.}\beta}$

$= \cot.\alpha\cot.\beta\left(\frac{\cos.a}{\text{sen.compl.}\alpha\,\text{sen.compl}\,\beta} - 1\right)$ formola più comoda .

27. Iscrivendo in un circolo ciascuno de'due triangoli precedenti, siccome $B > B'$, e $C > C'$, il circolo circoscritto al triangolo projettato è maggiore, perciò l'arco che misura $\frac{a}{2}$ è minore dell'

arco

(*) Alcuni dettagli sono diretti a completare il presente articolo trigonometrico, ed a renderlo adottabile, con qualche modificazione, in un corso analitico di Trigonometria rettilinea

arco che misura $\frac{x}{2}$; dunque $a < x$. Se un lato dell' angolo a suppongasi orizzontale, uno degli angoli α, β, per esempio α, è $= 100.^{\circ}$, quindi $\cos.x = \frac{R.\cos.a}{\text{sen}\beta}$; ma $R > \text{sen}.\beta$; dunque $x > a$. Se $a = 100.^{\circ}$ nell' ipotesi precedente, risulta $\cos.x = 0 = \cos.a$ e però $x = a$; ma se $a = 100.^{\circ}$ senza che niuno de' lati B, C sia orizzontale, si fa $\cos.x = -\cot.\alpha \cot.\beta$, onde $x > 100.^{\circ}$ lo che corrisponde a ciò che si è provato quì sopra.

28. Sieno $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$, tre archi descritti col centro in a (n.° 26), e con un raggio $= 1$, sulle rispettive facce della piramide triangolare, i cui arresti sono i lati B, C, D. Essendo $a'b'$ la misura dell' angolo a, $a'c'$ la misura dell'angolo α, e $b'c'$ la misura dell' angolo β, se pongasi $a'b' = C$, $a'c' = B$, $b'c' = A$, a motivo che l' angolo x è uguale all' angolo sferico $b'c'a'$ che chiameremo c', la formola (f) diviene $\cos.c' = \frac{\cos.C - \cos.A \cos.B}{\text{sen.A sen.B}}$ e dà

$$\left.\begin{array}{l} \cos.C = \cos.A \cos.B + \cos.c' \text{ sen.A sen.B} \\ \cos.B = \cos.A \cos.C + \cos.b' \text{ sen.B sen.C} \\ \cos.A = \cos.B \cos.C + \cos.a' \text{ sen.B sen.C} \end{array}\right\} \ldots (u)$$

Nello stesso modo si ottiene

formole da cui tutta e facilmente deriva la risoluzione de' triangoli sferici, com' è stato dimostrato dall' Eulero (Pietrob. 1779). La formola (f) può riguardarsi come un anello intermedio che unisce la Trigonometria rettilinea colla sferica.

29. Condotti dal centro a della sfera, cui spettano i lati del triangolo sferico $a'b'c'$, i raggi aa', ab', ac', se per un punto c' di un arresto ac' della piramide $a'b'c'a$ si fa passare un piano normale, l' angolo c'' della sezione triangolare rettilinea equivale all' angolo diedro delle facce $a'ac'$, $b'ac'$ e però all' angolo c'; ciascuno degli altri due angoli b'', a'' della medesima sezione è minore del rispettivo angolo diedro e però del rispettivo angolo sferico b', a'; dunque $a' + b' + c' > 200.^{\circ}$ Così non evvi bisogno di ricorrere al triangolo supplementario supponendo un vertice, per esempio b', polo di $a'c'$, e però a', c' retti; se diminuiscesi b' oltre ogni limite risulta $a' + b' + c' = 200.^{\circ}$ più un infinitesimo

di grado: tal è dunque il minimo limite della somma degli angoli di un triangolo sferico.

Con questo ci sembra di aver liberate ambedue le Trigonometrie da ogni deviazione sintetica, e di aver soddisfatto alle più delicate ricerche della Trigonometria rettilinea, con quella prontezza e facilità che propria è sol dell' Analisi.

30. Riassumendo la considerazione de' triangoli piani, ci proponiamo d' investigarne le variazioni per mezzo delle solite formole (h).

Un triangolo può variare in tre modi I. rimanendo costanti due elementi. II. rimanendo costante un elemento. III. variando tutti gli elementi. Nella prima ipotesi conviene considerar tre casi e sono, 1.° che resti invariato un angolo a ed un lato adiacente C; 2.° un angolo a ed il lato opposto A; 3.° che restino invariati B, C. Se restano invariati due angoli e però anche il terzo, il triangolo variato è simile al proposto, e le variazioni de' lati proporzionali ai lati stessi. In ogni caso il problema si riduce a trovare l'espressione più semplice de' rapporti delle variazioni ignote, o queste sieno finite o differenziali, variazioni che non debbon esser mai più di tre. Premettiamo le formole ch' esprimono le variazioni finite di sen., cos., tan., cot., seg., coseg.

In virtù delle notissime formole $1 - \cos.x = 2\text{sen.}^2\frac{1}{2}x$, $2\text{sen.}\frac{1}{2}x \times \cos.\frac{1}{2}x = \text{sen.}x$ si ha $\delta.\text{sen.}x = \text{sen.}(x+\delta x) - \text{sen.}x = \text{sen.}x\,(\cos.\delta x - 1) + \cos.x\,\text{sen}\,\delta x = -2.\text{sen.}^2\frac{1}{2}\delta x\,\text{sen.}x + \cos.x\,\text{sen.}\delta x = 2\text{sen.}\frac{1}{2}\delta x\,\cos.\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)$. Si ha parimente

$\delta\cos.x = \cos.(x+\delta x) - \cos x = \cos.x(\cos.\delta x - 1) - \text{sen.}x\,\text{sen.}\delta x = -2\text{sen.}^2\frac{1}{2}\delta x\cos.x - \text{sen.}x\,\text{sen.}\delta x = -2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta.x\,\text{sen.}\left(x+\delta x\right)$.

Così $\delta.\tan.x = \delta\,\frac{\text{sen}\,x}{\cos.x} = \frac{\cos.x\delta.\,\text{sen.}x - \text{sen.}x\delta\cos.x}{\cos.x\,(\cos.x + \delta\cos.x)} = \frac{\text{sen.}\,\delta x}{\cos.x.\,\cos.(x+\delta x)}$

$\delta.\text{cot.}x = -\frac{\text{sen.}\delta x}{\text{sen.}x\,\text{sen.}(x+\delta x)}$; $\delta.\text{seg.}x = \delta.\frac{1}{\cos.x} = -\frac{\delta\cos.x}{\cos.x\cos.(x+\delta x)}$

=

$$= \frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}\delta x \text{sen.}(x+\frac{1}{2}\delta x)}{\cos.x \cos.(x+\delta x)} ; \delta.\text{coseg.}x = \delta.\frac{1}{\text{sen.}x} = -\frac{\delta \text{sen.}x}{\text{sen.}x \text{ sen.}(x+\delta x)}$$

$$= -\frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}\delta x \cos.(x+\frac{1}{2}\delta x)}{\text{sen.}x \text{ sen.}(x+\delta x)} .$$

31. Facendoci a considerare le variazioni differenziali, siccome nel caso 1.° gli elementi variabili sono A, B, b, e si ha $dc = -db$, l' equazioni (h) prendono la forma seguente

$$\left.\begin{array}{l} \cos.a\, d\text{B} = \text{A}\, db \text{ sen.}b - \cos.b d\text{A} \\ d\text{A} = \cos.c\, d\text{B} + \text{B}db \text{ sen.}c - \text{C}db \text{ sen.}b \\ d\text{B} = \cos c\, d\text{A} + \text{A}db \text{ sen.}c \end{array}\right\} \ldots (x)$$

Posto $\frac{\text{B sen.}c}{\text{sen.}b}$ per C la seconda somministra $d\text{A} = \cos.c\, d\text{B} \ldots (1)$

La terza diviene $d\text{B} = d\text{B} \cos.^2 c + \text{A}db \text{ sen.}c$ e dà $d\text{B} = \frac{\text{A}db}{\text{sen.}c} \ldots (2)$

Eliminando dB colle due formole precedenti si ha $d\text{A} = \frac{\text{A}db}{\tan.c} \ldots (3)$

Impiegando le tre equazioni (x) senza prevalersi dell' equazione B sen.c = C sen.b, il calcolo riesce meno semplice.

Se $a = 100°$ le formole precedenti divengono

$$d\text{B} = \frac{\text{A}db}{\cos.b} \ldots (\text{I}), \; d\text{A} = \frac{\text{A}db}{\cos.b} \ldots (\text{II}), \; d\text{A} = \frac{\text{A}db}{\cot.b} \ldots\ldots (\text{III})$$

e siccome A : B : : 1 : cos.c, la (I) dà $\frac{d\text{B}}{db} = \frac{\text{B}}{\text{sen.}c \cos.c} = \frac{2\text{B}}{\text{sen.}2c}$, onde $\frac{d\text{B}}{db}$ è minimo quando sen.$2c$ è massimo, cioè quando $c = 50°$.

Per misurare un' altezza B, giova dunque situare il grafometro ad una distanza C, eguale presso a poco a B. Si vedrà che il risultato è lo stesso qualora gli errori dB, db sieno finiti.

32. Nel 2.° caso si ha come nel 1.° $dc = -db$, gli elementi variabili sono B, C. b, e l' equazioni (h) divengono

$$\begin{array}{l} d\text{C} + \text{A}db \text{ sen } b - \cos.a d\text{B} = 0 \\ \text{C}db \text{ sen.}b + \cos.b d\text{C} + \text{B}db \text{ sen.}c + \cos.c d\text{B} = 0 \\ d\text{B} - \cos.a\, d\text{C} - \text{A}db \text{ sen.}c = 0 \end{array}$$

Dalla terza $\text{A} = \frac{d\text{B} - \cos.a\, d.\text{C}}{db \text{ sen.}c}$: la prima si cangia in dC (sen.c —

cos.a

$\cos.a \operatorname{sen}.b) = d\mathrm{B}\,(\cos.a \operatorname{sen}.c - \operatorname{sen}.b)$, onde $d\mathrm{C} = -\frac{d\mathrm{B}\cos.c}{\cos.b}$ . . . (4)

Pongasi nella prima presa nella natural sua forma, la precedente espressione di $d\mathrm{C}$, e si avrà $d\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}db\cos.b}{\operatorname{sen}.a}$ . . . . (5); e perchè

$\frac{\mathrm{A}}{\operatorname{sen}.a} = \frac{\mathrm{B}}{\operatorname{sen}.b} = \frac{\mathrm{C}}{\operatorname{sen}.c}$, $d\mathrm{B} = \frac{\mathrm{B}db}{\operatorname{tang}.b}$ . . . . (6), $d\mathrm{B} = \frac{\mathrm{C}db\cos.b}{\operatorname{sen}.c}$ . . . . (7)

Mettendo nella prima l' espressione di $d\mathrm{B}$ dedotta dalla (4) si ha

$d\mathrm{C} = -\frac{\mathrm{A}db\cos.c}{\operatorname{sen}.a}$ . . . (8) e quindi $d\mathrm{C} = -\frac{\mathrm{B}db\cos.c}{\operatorname{sen}.b}$ . . . . (9), e

$d\mathrm{C} = -\frac{\mathrm{C}db\cos.c}{\operatorname{tang}.c}$ . . . . (10)

Se $a = 100°$ si ha

$d\mathrm{C} = -d\mathrm{B}\tan.b = -db\cot.c$ . . . (IV), $d\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}d.\operatorname{sen}.b}{1} = -\frac{\mathrm{A}d.\cos.c}{1}$ . . . (V)

$d\mathrm{B} = \frac{\mathrm{B}db}{\tan.b} = -\frac{\mathrm{B}dc}{\cot.c}$ . . . . . (VI), $d\mathrm{B} = \mathrm{C}db$ . . . . . (VII)

$d\mathrm{C} = \frac{\mathrm{A}d.\operatorname{sen}.c}{1} = \frac{\mathrm{A}d\cos.b}{1}$ . . . . (VIII), $d\mathrm{C} = -\mathrm{B}db$ . . . . . (IX)

$d\mathrm{C} = -\mathrm{C}db\cot.b = \frac{\mathrm{C}dc}{\tan.c}$ . . . (X).

33. Nel 3.° caso gli elementi variabili sono A, a, b, e si ha $\pm d.a = \mp db - dc$. Eliminato B mediante l' equazione $\mathrm{B}\operatorname{sen}.c = \mathrm{C}\operatorname{sen}.b$, l' equazioni (h) prendono la forma seguente

$$-\cos.b d\mathrm{A} + \mathrm{A}db\operatorname{sen}.b + \mathrm{C}\frac{\operatorname{sen}.b}{\operatorname{sen}.c}\operatorname{sen}.a\,(\mp db - dc) = 0$$

$$d\mathrm{A} + \mathrm{C}\operatorname{sen}.b\,(db + dc) = 0$$

$$\mathrm{C}\operatorname{sen}.a\,(\mp db - dc) - \cos.c d\mathrm{A} + \mathrm{A}dc\operatorname{sen}.c = 0$$

Dalla seconda $\mathrm{C} = -\frac{d\mathrm{A}}{\operatorname{sen}.b(db+dc)}$; quindi la prima e la terza, posto $\operatorname{sen}.(b+c)$ per $\operatorname{sen}.a$ divengono

$$\mathrm{A}db + d\mathrm{A}\cot c = 0$$
$$\mathrm{A}dc + d\mathrm{A}\cot.b = 0$$

perciò $d\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{A}db}{\cot.c}$ . . . . (11), $d\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{A}dc}{\cot.b}$ . . . . . (12)

e da queste $db = dc\frac{\cot.c}{\cot.b} = dc\frac{\tan.b}{\tan.c}$ . . . . (13), formola che dà

$db =$

$db = dc$ quando B = C; se inoltre abbiasi $a = 100^\circ$ risulta $d\mathrm{A} = -\mathrm{A}db$, $d\mathrm{A} = -\mathrm{A}dc$. Per ottenere le altre formole colla massima semplicità si differenzino l' equazioni B sen. a = A sen. b, C sen. a = A sen. c; nel differenziale della prima, cioè B. da. cos. a = dA sen. b + Adb cos. b, si ponga l' espressione di dA dedotta dalla (10) e si avrà $db = -\frac{\mathrm{B}\cos.cda}{\mathrm{A}}$ . . . . . (14); nel differenziale della seconda, Cda cos. a = dA sen. c + Adc cos. c, si ponga l' espressione di dA presa dalla (11), e si avrà $dc = -\frac{\mathrm{C}\cos.bda}{\mathrm{A}}$ . . . . (15).

Dalle due precedenti deriva poi $db = \frac{\mathrm{B}\cos.cdc}{\mathrm{Cos}.b}$ . . . . . (16).

Eliminando A mediante le formole (10), (14) si ottiene $d\mathrm{A} = \mathrm{B}\,\mathrm{sen}.\,cda$ . . . (17) e perchè B sen. c = C sen. b, si ha $d\mathrm{A}$ = C sen. bda . . . (18)

34. Le formole differenziali sopra esposte si potrebber'ottenere differenziando delle formole trigonometriche particolari, ma questo metodo avrebbe a parer nostro de' difetti notabili: 1.° perchè bisognerebbe aver presenti tutte le formole particolari: 2.° perchè converrebbe sceglier quella che dà un risultato più semplice: 3.° perchè questo metodo sarebbe soggetto a tentativo. Per esempio nel 1.° caso in cui gli elementi costanti sono C, a, se si vuole il rapporto di dB a db, conviene aver pronte tutte le formole che contengono B, b, le quali sono moltissime; escluse le più composte, ne rimangono parecchie fra cui non è sempre facile il decidere qual sia più opportuna .

35. Passando a considerare le variazioni finite, sieno costanti due elementi, e l' equazioni (h) nel 1.° caso diverranno

$$\left.\begin{array}{l} \cos.a\delta\mathrm{B} + \mathrm{A}\delta\cos.b + \delta\mathrm{A}(\cos.b + \delta\cos.b) = 0 \\ \delta\mathrm{A} - \delta\mathrm{B}(\cos.c + \delta\cos c) - \mathrm{B}\delta\cos.c - \mathrm{C}\delta\cos.b = 0 \\ \delta\mathrm{B} - \delta\mathrm{A}(\cos.c + \delta\cos.c)\ \delta\mathrm{A}\cos.c = 0 \end{array}\right\} \ldots . (y)$$

Dalla terza $\delta\mathrm{A} = \frac{\delta\mathrm{B} - \mathrm{A}\delta\cos.c}{\cos.c + \delta\cos.c}$; quindi dalla prima

$$\delta\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}(\cos.b\delta\cos.c - \cos.\delta\cos b)}{\cos.a(\cos.c + \delta\cos.c) + \cos.b + \delta\cos.b}$$ e però (n.° 30)

δB =

$$\delta B = \frac{A \operatorname{sen} \delta b}{\operatorname{sen.}(c-\delta c)} = -\frac{A \operatorname{sen} \delta c}{\operatorname{sen.}(c-\delta c)} \quad \ldots\ldots (a)$$

e perchè $A : A + \delta A :: \operatorname{sen}.c : \operatorname{sen}.(c-\delta c)$

$$\delta B = (A + \delta A)\frac{\operatorname{sen}.\delta b}{\operatorname{sen}.c} \quad \ldots\ldots (b)$$

Posto nella prima delle (γ) δB preso dalla terza si ha

$$\delta A \cos.a[\cos.c + \delta\cos.c) + A\cos.a\delta\cos.c = -(A\delta\cos.a + \delta A(\cos.b + \delta\cos.b)]$$

onde $\delta A = -\frac{A(\cos.a\cos.c + \delta\cos.b)}{\cos.a(\cos.c + \delta\cos.c) + \cos.b + \delta\cos.b} =$ (n.° cit.)

$$= -\frac{A(\operatorname{sen.}(c-\delta b) - \operatorname{sen.}c)}{\operatorname{sen.}(c-\delta b)} = -\frac{A(\operatorname{sen.}(c+\delta c) - \operatorname{sen.}c)}{\operatorname{sen.}(c-\delta c)} = -\frac{A\delta\operatorname{sen.}c}{\operatorname{sen.}(c-\delta c)}$$

Dunque $\delta A = -\frac{2A \operatorname{sen.}\frac{1}{2}\delta c \cos.(c+\frac{1}{2}\delta c)}{\operatorname{sen.}(c-\delta c)} \quad \ldots\ldots (c)$

Eliminando A per mezzo di (a), (c) si ottiene . . . . . :

$\frac{\delta A \operatorname{sen.}(c-\delta c)}{2\operatorname{sen.}\frac{1}{2}c\delta\cos.(c+\frac{1}{2}\delta c)} = \frac{\delta B \operatorname{sen.}(c-\delta c)}{\operatorname{sen.}\delta b}$, e perchè $\operatorname{sen.}\delta b = -\operatorname{sen.}\delta c$,

è $\frac{2\operatorname{sen.}\frac{1}{2}\delta c}{-\operatorname{sen.}c} = \frac{1}{\cos.\frac{1}{2}\delta c}$, $\delta A = \frac{\delta B\cos.(c+\frac{1}{2}\delta c)}{\cos.\frac{1}{2}\delta c} \quad \ldots\ldots (d)$.

La formola (c) da noi ottenuta, è più comoda di quest' altra

$\delta A = -\frac{2A\tan.\frac{1}{2}\delta c}{\tan.(c+\frac{1}{2}\delta c)\tan.\frac{1}{2}\delta c}$, trovata mediante una combinazione non facile a prevedersi di parecchie formole complicate. Le formole (a), (b), (c), (d), riproducono le formole (1), (2). (3) purche si pongano i differenziali per le differenze e però δc per sen δc, sen. c per sen $(c \pm \delta c)$, 1 per cos. δc, ec. ec.

36. Applicando lo stesso metodo al 2.° e 3.° caso si trova

$$\delta C = -\frac{2C\operatorname{sen.}\frac{1}{2}\delta b\cos.(c-\frac{1}{2}\delta b)}{\operatorname{sen.}c}$$

$$\delta B = -\frac{2B\operatorname{sen.}\frac{1}{2}\delta b\cos.(b-\frac{1}{2}\delta b)}{\operatorname{sen.}b}$$

δC

$$\delta C = -\frac{\delta B \cos.\left(c + \frac{1}{2}\delta b\right)}{\cos.\left(b - \frac{1}{2}\delta b\right)}$$

$$\tan.\frac{1}{2}\delta b = \frac{\tan.\frac{1}{2}\delta c \tan.\left(b + \frac{1}{2}\delta b\right)}{\tan.\left(c - \frac{1}{2}\delta b\right)} = -\frac{\delta A \cot.\left(c - \frac{1}{2}\delta b\right)}{2A - \delta A} = -\frac{\delta A \cot.\left(b + \frac{1}{2}\delta b\right)}{2A - \delta A}$$

$$\text{sen.}\frac{1}{2}\delta b = -\frac{2B \text{ sen.}\frac{1}{2}\delta a \cos.\left(c - \frac{1}{2}\delta b\right)}{\delta A - 2A} = \frac{2C \text{ sen.}\frac{1}{2}\delta a \cos.\left(b + \frac{1}{2}\delta b\right)}{2A - \delta A}$$

$$\delta A = \frac{2B \text{ sen.}\frac{1}{2}\delta a \text{ sen.}\left(c - \frac{1}{2}\delta b\right)}{\cos.\frac{1}{2}\delta b} = \frac{2C \text{ sen.}\frac{1}{2}\delta a \text{ sen.}\left(a + \frac{1}{2}\delta b\right)}{\cos.\frac{1}{2}\delta b}.$$

Se un elemento solo o se niuno è costante, purchè si abbiano le variazioni di due elementi nel primo caso, e di tre nel secondo, si ottengono con egual facilità i rapporti delle variazioni non conosciute.

37. Problema. Si dimanda l'angolo BCA (Fig. I.), il cui vertice è nel centro C della base *mnro* di un campanile la di cui croce fu osservata dal punto A, per lo che si ebbe l' angolo ridotto BAC.

Soluz. Si scelga un punto *e* snlla retta AC, dal quale si possano traguardare le stazioni A, B. Misurata A*e* si hanno tutti gli elementi del triangolo B*A*e in cui si suppone dato AB. Per mezzo di B*e* e degli angoli C*e*B, *e*BC si calcoli *e*C $= \delta$A*e*, e posto AB=C, B*e* $=$ A, si avrà $-$ sen.$\delta c = \frac{\delta B \text{ sen.}(c - \delta c)}{A} = -$ sen δ B*e*A; quindi ACB $=$ A*e*B $- \delta$A*e*B.

Questo ci sembra un metodo più esatto e più semplice di quelli che sino ad ora sonosi adoperati.

Molti sono i problemi spettanti alla Geometria Descrittiva, le di cui soluzioni non sono abbastanza semplici, o abbastanza generali. Sia pertanto.

38. Problema. Determinare in un modo semplice la posizione di un globo aereostatico, cioè la sua distanza dal piano stesso. Soluzione. Si scelgano tre punti M′, M″, M‴ (F.ª II.) situati in un piano orizzontale, distanti fra loro più che si può, e tali che

la perpendicolare calata dal globo M cada dentro al triangolo M' M'' M'''. Due osservatori de' quali uno sia per esempio in M', l'altro in M'', prendano nel medesimo istante convenuto, i rispettivi angoli M M' M'' M M'' M'; poscia l' osservatore in M'', lasciato fermo il traguardo diretto ad M, misuri l' angolo MM'' M'''. Misurata quella delle distanze M' M'', M' M''', M'' M''', che riesce più comoda; e gli angoli adiacenti ad essa nel triangolo M'M''M''', si calcolino le altre due. Nel triangolo M' MM'' ove si sanno due angoli ed un lato, si calcoli MM'', l'apotema MP ed il semmento M''P; quindi nel triangolo M'MM'' dove si hanno tutti i lati si calcoli M' M'' M'''. Così nell'angolo triedro, avente il vertice in M'' si conoscono gli angoli piani, e può determinarsi l' angolo diedro MPN. Nel triangolo NMP si calcoli MN e si avrà l' altezza richiesta; si calcoli PN, e siccome il punto P è già noto, si avrà il punto N, cioè la projezione cercata.

Per quanto ci sembra, l'esposto problema non si è sciolto sino ad ora che per mezzo di tre osservatori, i quali misurino gli angoli fatti colla verticale dagli arresti MM', MM'', MM''', e per mezzo delle curve a doppia curvatura che risultano dalle intersezioni di tre coni, curve che si costruiscono solo per punti, e che conducono ad un' equazione di 8.° grado riducibile al 4.°

La soluzione precedente dimostra *che una piramide triangolare è determinata quando si hanno i lati della base, e tre degli angoli che gli arresti del vertice fanno coi lati della base, purchè due di tali angoli sieno adiacenti ad uno stesso lato della base.*

39. Problema. Determinare la posizione di un punto M dello spazio, di cui si conoscano le distanze da tre punti M', M'', M''', dati di posizione. Questo problema che si riduce a determinare il vertice di una piramide triangolare, della quale sien dati tutti gli arresti, si può sciogliere in due maniere.

Soluzione I. Trovati come sopra i punti P, P', e gli apotemi MP, MP', si conducano due piani, de' quali uno per MP, l' altro per MP'. Costruita la loro intersezione, si descriva in uno di essi per esempio nel piano PMN, un circolo col raggio MP e col centro in P; ed il punto dove questo incontra l'intersezione preceden-

dente sarà il punto richiesto. Non v'è dunque bisogno di ricorrere alle intersezioni di tre sfere, ed il problema si riconduce a quest'altro: *costruire un punto* M *dello spazio, di cui si hanno le distanze da i lati di un triangolo dato di grandezza e di posizione.*

Soluzione 2.ª Pongasi $MM' = a$, $MM'' = b$, $MM''' = c$, e le coordinate rispettive de' punti M', M'', M''', M, sieno x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; x, y, z. Avremo

$$a^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$b^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2$$
$$c^2 = (x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2$$

Facciasi passare il piano delle x, y pel più basso de' punti dati, e sia per esempio M': sarà $z' = 0$. e posto

$$2x' = d,\ 2y' = d',\ x'^2 + y'^2 = d''$$
$$2x'' = e,\ 2y'' = e',\ 2z'' = e'',\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = e'''$$
$$2x''' = f,\ 2y''' = f',\ 2z''' = f'',\ x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = f'''$$

si avranno le tre seguenti

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - dx - d'y + d'' \\ b^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - ex - e'y - e''z + e''' \\ c^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - fx - f'y - f''z + f''' \end{aligned}\right\} \ldots . (1)$$

si elimini $x^2 + y^2 + z^2$ per mezzo della prima, e pongasi $b^2 - a^2 + d'' - e''' = A$, $c^2 - a^2 + d'' - f''' = B$, $d - e = \alpha$, $d' - e' = \alpha'$, $d - f = \beta$, $d' - f' = \beta'$ e si otterrà

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \alpha' y - e''z &= A \\ \beta x + \beta' y - f'z &= B \end{aligned}\right] \ldots . (2)$$

Dalla prima $x = \frac{A - \alpha' + e''z}{\alpha}$, e dalla seconda che diviene

$$\beta A + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)y + (\beta e'' - \alpha f'')z = \alpha B,$$

$y = \frac{\alpha B - \beta A + (\alpha' f'' - \beta e'')z}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$; quindi $x = \frac{(\beta' e'' - \alpha' f'')z + \beta' A - \alpha' B}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. Pongasi

$\frac{\alpha B - \beta A}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = B'$, $\frac{\alpha f'' - \beta''}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = A'$; $\beta' A - \alpha' B = B''$, $\beta' e'' - \alpha' f'' = A''$ e si ritrarrà $x = A''z + B''$, $y = A'z + B'$. Sostituiti questi valori nella prima dell'equazioni (1) e fatto $A''^2 + A'^2 + 1 = C$, $2A''B'' + 2A'B' - dA'' - d'A' = D$, $B''^2 + B'^2 - dB'' - d'B' + d'' - a^2$

$= E$, si ottiene $Cz^2 + Dz + E = o$ onde $z = -\frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4EC}}{2C} = F$, $y' = A'F + B'$, $x = A''F + B''$.

Se i punti M', M'', M''' sono nel piano delle x, y, si ha $z' = o$, $z'' = o$, $z''' = o$, quindi $e' = o$, $f'' = o$, perciò $\alpha'' = o$, $\beta'' = o$, e finalmente $A' = o$, $A'' = o$, laonde $C = 1$, $D = o$, $z = \pm\sqrt{E}$, $y = B'$, $x = B''$.

L' ingegnosissima soluzione di Lagrange è molto laboriosa ed astrusa, perchè non vi si fa passare alcun piano coordinato per uno de' punti M', M'', M'''; e perchè x, y, z vi si esprimono per a, b, c, e per i lati del triangolo M' M'' M''' .

40. Problema. Per un punto dato in un piano far passare una retta che faccia un dato angolo con una retta data nel piano stesso.

Soluzione. Sia $y = ax + b$ l'equazione della retta data, α la tangente dell' angolo, x', y' le coordinate del punto, ed $y - y' = a'(x - x')$ sarà l' equazione della retta richiesta; ma la tangente dell' angolo che fanno tra loro le rette $y = ax + b$, $y = a'x + (y' - a'x')$ è $\frac{a' - a}{1 + aa'}$, dunque $\frac{a' - a}{1 + aa'} = \alpha$ e però $a' = \frac{\alpha + a}{1 - a\alpha}$; dunque $y - y' = \frac{\alpha + a}{1 - a\alpha}(x - x')$ è l' equazione desiderata.

Se la retta debba condursi perpendicolarmente alla retta data, si ha $\alpha = \infty$ e però $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$, e posto $y' + \frac{x'}{a} = b'$, $y = -\frac{1}{a}x + b'$. Al problema precedente può ricondursi quest' altro.

41. Problema. Per un punto dato nello spazio far passare una retta, che formi un angolo assegnato con una retta, data pure nello spazio.

Soluzione I.ª La retta cercata dovendo essere nel piano che passa pel punto dato e per la retta data, se x', y', z' sieno le coordinate del punto, ed $Ax + By + Cz + D = o$ l' equazione del piano, si ha l'equazione $Ax' + By' + Cz' + D = o$. Si determinino due punti della retta data per mezzo delle sue equa-

equazioni $x=a'z+\alpha'$, $y=b'z+\beta'$, e ne sieno x'', y'', z'', x''', y''', z''' le coordinate. Avendosi l'equazioni, $Ax'+By'+Cz'+D=0$, $Ax''+By''+Cz''+D''=0$, $Ax'''+By'''+Cz'''+D=0$ il piano espresso dall'equazione $Ax+By+Cz+D=0$, è determinato. Il punto e la retta si rapportino a due assi rettangolari presi nel piano stesso, ed il problema sarà ricondotto al precedente.

Soluzione 2.ª Essendo $x=az, y=bz$, l'equazioni della retta dimandata, siccome questa dee incontrare la retta data, si ha $(a-a')=\beta'(b-b')\alpha'$ e quindi $b=\frac{(a-\alpha)\beta'+b'\alpha'}{\alpha'}$. Ora l'equazione del problema, chiamando γ il coseno dell'angolo assegnato, è $\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}=\gamma$; dunque posta l'espressione di b si ha

$$\frac{\alpha'^2(1+aa'+b'^2)+\alpha'\beta'b'(a-a')}{\sqrt{(\alpha'^2(1+a^2+b^2)+\beta'^2(a^2+a'^2+2aa')+2\alpha'\beta'b'(a-a'))}\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}=\gamma$$ equazione di 2.° grado per rapporto ad a, e che somministra due valori per b, e due rette per la soluzione del problema.

Se la retta cercata debb' essere perpendicolare, si ha $\gamma=0$, ed $1+aa'+bb'=0$; ma $b=\frac{(a-a')\beta'+b'\alpha'}{\alpha'}$; dunque $1+aa'+\frac{\beta'b'(a-a')+b'^2\alpha'}{\alpha'}=0$; perciò $a=\frac{b'(a'\beta'-\alpha'b')-\alpha'}{a'\alpha'+b'\beta'}$, e $b=\frac{a'\alpha'(b'\alpha'-a\beta'')-\alpha'\beta'}{\alpha(a'\alpha'+b'\beta')}$

L' equazioni delle due rette danno per le coordinate dell' incontro, $z=\frac{\alpha'}{a-a'}$, $y=\frac{b\alpha'}{a-a'}$, $x=\frac{a\alpha'}{a-a'}$ e poi $\frac{b\alpha'}{a-a'}=\frac{b'\alpha'}{a-a'}+\beta''$ cioè $(b-b')\alpha'=(a-a')\beta''$, che è la nota condizione dell' incontro. La lunghezza della retta che sotto l' angolo assegnato unisce il punto dato colla retta proposta è

$$\delta=\sqrt{\left[\left(\frac{\alpha'}{a-a'}-z'\right)^2+\left(\frac{b\alpha'}{a-a'}-y'\right)^2+\left(\frac{a\alpha'}{a-a'}-x'\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{a-a'}\sqrt{\left[(\alpha'+(a'-a)z')^2+(b\alpha'+(a'-a)y')^2+a\alpha'+(a'-a)x')^2\right]}$$

$$=\frac{1}{a-a'}\sqrt{\left[(1+a^2+b^2)\alpha'^2+2\alpha'(a'-a)(z'+by'+ax')+(a'-a)^2(z'^2+y'^2+x'^2)\right]}$$

Dell'

Dell' esposto problema non conosciamo altra soluzione che quella del Profess. Monge; dessa per altro è soverchiamente operosa, e si riferisce al solo caso, in cui la retta richiesta debb'essere perpendicolare alla retta data.

42. Problema Per una retta data nello spazio condurre un piano che faccia con un dato piano un angolo assegnato.

Soluz. Posta l'origine de' piani coordinati nel punto in cui la retta incontra il piano dato, sia $z = A'x + B'y$ l'equazione del piano dato, $z = A''x + B''y$ l'equazione del piano richiesto, ed $x = az$, $y = bz$, l'equazioni della retta. Essendo x', y', z', le coordinate del suo punto d' incontro, e γ il coseno dell' angolo assegnato, si ha $z' = A''x' + B''y'$, $\gamma' = \frac{A'A'' + B'B''}{\sqrt{(A'^2+B'^2+1)}\sqrt{(A''^2+B''^2+1)}}$ e da queste due valori per A'', B''.

Se la retta è nel piano dato, posta l'origine in un punto della medesima, si ha per essa la sola equazione $x = az$; quindi $\frac{x}{a} = A'x + B'y$ e però $y = x\,\frac{(1-aA')}{aB'}$. Con questo l' equazione del piano richiesto è $\frac{x}{a} = A''x + B''x\,\frac{(1-aA')}{aB'}$, cioè $B''(1-aA') = B'(1-aA'')$, equazione che combinata con $\gamma' = \frac{A'A''+B'B''}{\sqrt{(A'^2+B'^2+1)}\sqrt{(A''^2+B''^2+1)}}$ dà i due valori per A'', B''.

Accenno per ultimo il seguente

Teorema. Un angolo solido di n facce è determinato quando sono dati i suoi n angoli piani ed $n - 3$ de' suoi angoli diedri.

43. Sino ad ora la risoluzione analitica de' poligoni si è fatta dipendere dai teoremi seguenti

$$\left.\begin{array}{l} A \operatorname{sen} a' + B \operatorname{sen}(a' + b') + C \operatorname{sen}.(a' + b' + c') \ldots \\ + W \operatorname{sen}.(a' + b' + c' \ldots + w) = 0 \\ A \cos.a' + B \cos.(a' + b') + C \cos.(a' + b' + c') \ldots \\ + W \cos.(a' + b' + c' \ldots + w) = 0 \end{array}\right\} \ldots (K)$$

dove A, B, C ... W sono i lati del poligono, ed a', b', c' ... w so-

no

no gli angoli esterni, tali che a' sia compreso fra il lato A ed il prolungamento del lato B; b' fra il lato B ed il prolungamento del lato C, ec.; e si è creduto di facilitarne l'applicazione, deducendone due equazioni ausiliari, che trattandosi de' quadrilateri sono

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB\cos.b + 2AC\cos.(b' + c') + 2BC\cos.c' = 0$$

$$D^2 + C^2 + 2CD\cos.d' = A^2 + B^2 + 2AB\cos.b'$$

le quali per altro, nè si derivano con semplicità, nè si applicano comodamente. Noi passiamo a dimostrare che i soli teoremi (K), purchè si riducano ad una forma opportuna, bastano per ottenere in una maniera semplicissima la risoluzione di cui si tratta.

Per li quadrilateri i teoremi (K) divengono

$$A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a' + b') + C\,\text{sen}.(a' + b' + c') = 0$$

$$A\cos.a' + B\cos.(a' + b') + C\cos(a' + b' + c') = 0$$

e perchè $a' + b' + c' = 400.^{\circ} - d'$, possono ridursi alla forma seguente

$$A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a' + b') - C\,\text{sen}.d' = 0$$

$$A\cos.a' + B\cos.(a' + b') + C\cos.d' + D = 0$$

Si moltiplichi la prima di quest' equazioni per $\cos.a'$, la seconda per $\text{sen}.a'$, e sottraendo il primo prodotto dal secondo si avrà

$$-B\,\text{sen}.b' + C\,\text{sen}.(a' + d') + D\,\text{sen}.a' = 0$$

Dunque i teoremi ausiliari per la risoluzione de' quadrilateri possono essere i seguenti

$$\left.\begin{array}{l} A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a' + b') - C\,\text{sen}.d' = 0 \\ D\,\text{sen}.a' + C\,\text{sen}.(a' + d') - B\,\text{sen}.b' = 0 \end{array}\right\} \ldots (M)$$

Per vedere con qual facilità i teoremi precedenti si prestino alla risoluzione di cui si tratta, sia

Probl. 1.° Dati A, B, C, a' b', trovare D e d', c'.

Soluz. Dalla prima equazione (M) si ha $\text{sen}.d' = \frac{A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a' + b')}{C}$

e però dalla seconda $D = \frac{B\,\text{sen}.b' - C\,\text{sen}.(a' + A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a' + b'))}{\text{sen}.a'}$.

Probl. 2.° Dati a', b', d' ed A, B, trovare C, D.

Soluz. Dalla prima $C = \frac{A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a' + b')}{\text{sen}.d'}$, e dalla seconda

$D =$

$$D = \left[B \operatorname{sen}.b' - [A \operatorname{sen}.a' + B \operatorname{sen}.(a'+b')] \frac{\operatorname{sen}.(a'+d')}{\operatorname{sen}.a'} \right] : \operatorname{sen}.a' .$$

Probl. 3.° Dato l'angolo b, gli angoli a, c, retti ed i lati A, B che comprendono l'angolo b, trovare i lati C, D.

Soluz. Si ha $b' = 200^\circ - b$, $a' = 100^\circ$, $c' = 100^\circ$, $d' = 400^\circ - (200^\circ + b') = 200^\circ - b' = b$.

Dunque l'equazioni (M) divengono

$$A + B \operatorname{sen}.(300^\circ - b) - C \operatorname{sen}.b = 0$$
$$D + C \operatorname{sen}.(100^\circ + b) - B \operatorname{sen}.(200^\circ - b) = 0$$

cioè

$$A - B \cos.b - C \operatorname{sen}.b = 0$$
$$D + C \cos.b - B \operatorname{sen}.b = 0$$

Dalla prima $C = \frac{A - B \cos.b}{\operatorname{sen}.b}$, e però dalla seconda $D = B \operatorname{sen} b - \cos.b \left(\frac{A - B \cos.b}{\operatorname{sen}.b} \right) = \frac{B - A \cos.b}{\operatorname{sen}.b}$. Il problema precedente è stato sciolto da *Legendre* (Elem. de Géom. Note V.) col soccorso di una costruzione geometrica, adattata al caso che sia $b < 50^\circ$.

I teoremi (K) per li poligoni di cinque lati, posto $a' + b' + c' + d' = 400^\circ - e'$, sono

$$A \operatorname{sen}.a'' + B \operatorname{sen}.(a'+b') + C \operatorname{sen}.(a'+b'+c') - D \operatorname{sen}.e' = 0$$
$$A \cos.a' + B \cos.(a'+b') + C \cos.(a'+b'+c') + D \cos.e' + E = 0$$

e tolta la prima equazione moltiplicata per $\cos.a$, dalla seconda moltiplicata per $\operatorname{sen}.a'$, divengono

$$A \operatorname{sen}.a' + B \operatorname{sen}.(a'+b') + C \operatorname{sen}.(a'+b'+c') - D \operatorname{sen}.e' = 0$$
$$E \operatorname{sen}.a' + D \operatorname{sen}.(a'+d') - C \operatorname{sen}.(b'+c') - B \operatorname{sen}.b' = 0$$

Per gli esagoni trovansi nello stesso modo l'equazioni

$$A \operatorname{sen}.a' + B \operatorname{sen}.(a'+b') + C \operatorname{sen}.(a'+b'+c') + D \operatorname{sen}.(a'+b'+c'+d') - E \operatorname{sen}.f' =$$
$$F \operatorname{sen}.a' + E \operatorname{sen}.(a'+f') - D \operatorname{sen}.(b'+c'+d') - C \operatorname{sen}.(b'+c') - B \operatorname{sen}.b' = 0$$

In generale, operando su i teoremi (K) senza procedere per induzione, se i lati sieno A, B, C, D ... U, V, W, e gli angoli esterni corrispondenti a', b', c', d' ... u, v, w, si hanno i teoremi che seguono

$$A \operatorname{sen}.a' + B \operatorname{sen}.(a'+b') + C \operatorname{sen}.(a'+b'+c') \ldots + U \operatorname{sen}.(a'+b'+c'+d' \ldots + u) - V \operatorname{sen}.W = 0$$
$$W \operatorname{sen}.a + V \operatorname{sen}.(a'+w) \ldots + D \operatorname{sen}.(b'+c'+d') - C \operatorname{sen}.(b'+c') - B \operatorname{sen}.b' = 0$$

L'Articolo precedente potrebb' estendersi molto più, deriva-

vando dai due teoremi ridotti molte delle formole proposte senza dimostrazione dal Prof. Mascheroni (*Problèmi per gli Agrimensori*) e da lui ottenute col soccorso di particolari metodi geometrici.

SAGGIO

DI CALENDARIO PERPETUO DELLE UMANE NATIVITÀ

RICAVATO DA PIU' REGISTRI

DI ANNI LX. CON RELATIVE RICERCHE, E RIFLESSIONI

Di Vincenzo Chiminello

Ricevuto il dì 27 Giugno 1805.

Da una mera curiosità ebbe origine la costruzione laboriosa di queste mie Tavole, argomento non alieno dal Matematico, e conveniente al Fisico, Medico specialmente, o Meteorista. La circostanza, che l' abitazione mia trovisi rimpetto ad una Chiesa Parrochiale non distante che poche pertiche, fu occasione da qualche tempo, che rimarcassi un' alternativa di frequenza, e di pausa di nascite della specie nostra; io vedeva, per esempio, dalle finestre delle mie stanze nelle ore di svagamento, e veggo pure presentemente in tutto l'anno, o mi viene riferito, portarsi al Sacro Fonte in un solo giorno tre o quattro bambini, altrettanti nel seguente giorno, o così, a un dipresso, nel corso di sei o sette giorni consecutivi, e di poi cessare o rallentarsi notabilmente cotale frequenza, e dopo un mese, o anche più, periodicamente, e similmente rinnovarsi. Dubitando peraltro, se così fatta alternativa possa essere casuale, e particolare di questo luogo proveniente da indeterminabile combinazione di cause morali, e fisiche, diversa in diversi luoghi, temporaria, o perpetua, ricercai primieramente alcuni degni Parrochi di questa Città, se ciò accade nelle loro Parrocchie, e da essi intesi, che avevano confusamente osservato sempre una cosa simile; secondariamente in tempo di vacanze, per la cortesia di alcuni Parrochi miei amici avendo avuto comodo di scorrere li Registri Battesimali trovai, che sebbene in detti luoghi nascite succedevano in ciascuna setti-

timana dell' anno, il maggior numero però s'accumulava in certi giorni, e certe settimane, poi cessava, e ritornava con notabile periodo più, o meno lungo; e ciò ch' è osservabile, in tutti i luoghi negli stessi tempi. Certo adunque, o almeno molto probabilmente assicurato della cosa, mi venne voglia di conoscere, qual sia la progressione media delle nascite, o sia delle generazioni nella specie nostra nel corso di tutto l'anno, e quali possano essere in natura l'esterne cause generali delle alternative, ed ineguaglianze di tal progressione; e quindi ho risoluto di procacciarmi un sufficiente numero di Registri Battesimali, per lo spoglio dei quali comporre un Calendario perpetuo simile a quello delle annuali Meteore composto dal celebre Toaldo inserito nella sua *Meteorologia applicata all' Agricoltura*, e poi riformato nel giornale-Astrometeorologico 1776.

Fui però qualche tempo indeciso sulla scelta dei Registri, se doveva prenderli da una sola Città popolata, o da' più luoghi sparsi in diversi Territorj; ma riflettendo, che in una Città per le cause morali di coltura, di vizio, e di povertà il progresso naturale della generazione può venire qualche poco modificato, ho creduto meglio dovermeli procurare da' luoghi esterni, popolati però alcuni e quasi urbani di Territorj diversi, di monte e di piano, di suolo fertile, mediocre, e magro, onde il composto per li reciprochi compensi potesse dare il vero medio progresso annuo naturale.

Per mezzo dunque di amici ricercai tali Registri, e n' ebbi due dal Territorio Cenedese, de' quali uno di Ceneda stessa, due dal Territorio di Belluno, tre da quello di Feltre, due dal Trevigiano, tre del Padovano, tra' quali uno di Piove di Sacco, Castello molto popolato, sei dal Vicentino alto pedemontano, dei quali uno di Schio Terra popolatissima, ed altro di S. Orso Terra pure popolata a piedi di monte Sumàn, e cinque finalmente del basso Territorio Vicentino tra' quali uno di Barbarano, luogo molto popolato, in tutti al numero di 23 Registri dall'anno 1700 inclusivamente sino al 1785. La popolazione di detti luoghi tutti presi insieme è poco minore di 30 mila individui; e in com-

plesso in questo clima temperato partecipa d'ogni qualità d'aria, sottile e grossa, salubre, alquanto insalubre, e mezzana, di suolo fertile e magro, ma non magrissimo. Il Dominio Veneto non ebbe che breve guerra a principio del Secolo, e una neutralità armata tra il 1730 e 1735, la Marina Veneta non tirava da Terra ferma annualmente che pochi Malviventi, e pochissimi Condannati, non ci fu in alcun anno estremità di fame, non peste mortale, non ci furono, come nè ci sono a questo tempo emigrazioni; sicchè può credersi, che il risultato medio concluso da un buon numero di anni di tai Registri sia nel complesso di tali Paesi prossimamente, o con pochissima differenza l'opera intiera della Natura.

Nell' anno 1794 pertanto giunsi allo spoglio dei Registri di anni 51, cioè dal 1700 sino al 1750, lo che accennò un celeberrimo Scrittore, conclusi delle nascite l' annua progressione media, vi scorsi una legge, vi feci dei riflessi, e ne ricavai delle conseguenze, e quasi non dubito, che non bastasse all' oggetto che mi proposi; ma nondimeno per ridurre la cosa a non poterne punto dubitare, ultimamente ho prodotto lo spoglio dei Registri sino ad anni 60, cioè dal 1700 sino al 1759, rifusi tutto, e il Calendario, che porgo, si è il frutto dei due lavori combinati, dei quali prima di darne la spiegazione, e farvi le riflessioni, dirò il rigoroso metodo materiale che ho tenuto, altra prova della fisica certezza, che può accordarsi ai risultati di tutto il mio lavoro.

In più gran fogli di carta reale consistente segnai di mese in mese doppia colonna verticale per ciascun giorno colle lettere iniziali M. F. in colonna orizzontale in testa delle facciate per notare separatamente li Maschj dalle Femine, e sotto immediatamente la colonna orizzontale dei giorni, indi poi seguitando orizzontalmente tante colonne, quanti anni potevano capire nella facciata stessa, e così seguitando di facciata in facciata per il resto degli anni sino al numero prima di 51, come dissi, poi di 60. Così preparato, spogliai li Registri, ma uno ad uno per non cadere in confusione, ed equivoco, e per simile cautela notai di ogni mese prima tutti li maschj, poi le femine, lo che mi era fa-

ci-

cile, perchè ogni Registro procede sempre colla loro separazione, siccome aveva ai miei amici raccomandato; scorso un anno non interrompeva prendendo un altro Registro, ma seguitava lo spoglio dal primo sino all'ultimo degli anni prefissi, e così tornando a capo feci degli altri Registri uno ad uno. Quando nel successivo spoglio dei Registri cadeva in uno stesso giorno più di una nascita, se il numero pria notato era riducibile, lo riduceva, se poi nò, raschiava la carta sino a che restavano soli vestigj languidi del numero precedente, e scriveva quel maggior numero che risultava, e se talora per le replicate raschiature nè si poteva il numero ridurre, nè raschiare di nuovo la carta, essendo le colonne orizzontali segnate già larghe, notava sotto l'altro numero che veniva. Finalmente per correggere qualche sbaglio che fosse corso di numero, di giorno, o di sesso, spogliato qualunque mese, pria di cominciare il mese seguente, ebbi cura di tosto rivederlo tutto, e se v'era sbaglio facilmente mi accorgeva dall'inchiostro fresco, e dai vestigj del numero, che c'era prima. Per tal modo mi risultò un Catalogo dei Nati giornalmente di anno in anno nello spazio non interrotto d'anni 60, da una popolazione di circa 30 mila, dal quale ricavai, fatte le somme, il Calendario perpetuo indicante per le nascite, come generalmente la natura proceda in generando in tutto l'annuo corso del Sole, del qual Calendario soggiungo tosto la breve spiegazione.

Dei numeri, che procedono secondo i giorni dei mesi, i due primi sono le somme di quanti nacquero maschj, e femine in detti giorni nello spazio di tutti gli anni 60, il terzo numero si è la somma di quei due. Per esempio nel primo giorno di Gennajo in anni 60 nacquero maschj 92, femine 90, dei quali la somma è 182, così nel secondo giorno maschj 88, femine 77, la somma 165, ec. ec. Li numeri grandi a piedi di pagina sono prima le somme totali dei nati maschj e femine in ogni mese, e le somme di queste somme, poi li medj ricavati dalla divisione delle tre somme per il numero di giorni 31, o 30; del mese di Febbrajo le somme, e li medj sono di giorni 28 soltanto, perchè il 29 ricorrendo ad ogni 4 anni, li medj che si ricavassero dalle intiere somme,

me, non potrebbero compararsi ai medj degli altri mesi. I mesi finalmente notati sotto distanti di 9 dai superiori suppongonsi quelli dei concepimenti. Or veniamo all' esame.

Oggetto di considerazione all' Aritmetico Politico si è primieramente la somma totale dei Nati nello spazio di anni 60, questa è 73244, che dà un numero medio di nascite annuo 1220 $\frac{4}{10}$ in una popolazione qual notai di 30 mila, circa, da che si arguisce, che in parità di circostanze, se la popolazione fosse di un milione nascerebbero annualmente 40666, e se di dieci milioni 406660, dei quali però secondo le copiose *Tavole di Vitalità* del celebre Toaldo, come Egli le chiama invece che di *Mortalità*, resterebbe un terzo soltanto, anzi meno. vivente all' età d' anni 20, dei quali dopo la probabile sopravvivenza media, tra campagna, monte, e Città non è che di anni 38, mesi 4 circa. Tanta è la mortalità del genere umano dalla nascita sino agli anni 20! Per diminuire tanta mortalità, come al Medico spetta di suggerire le fisiche providenze, così all'Aritmetico Politico spetterà di suggerire quelle di morale governo. Secondariamente altro oggetto di considerazione Politica si è la notabile discrepanza di nascite tra i maschj, e le femine nate in anni 60; la somma delle femine si è 35529, quella dei maschj 37695, onde viene la generale proporzione di 100 : 106, ossia l'eccesso di 6 maschj sopra 100 di femine. Da questo risultato si conosce, che la poligamia simultanea proibita dalla Religione lo è pure intrinsecamente vietata dalla natura, e che quel poco di celibato, che fra noi si osserva negli uomini non è tanto biasimevole, come d' alcuni lo si vuol fare, e si deve nella detta discrepanza piuttosto riconoscere una superiore disposizione, affinchè un piccolo numero d'uomini disimpegnato, e libero serva meglio nel Santo Ministerio della Religione, e nella Milizia. È vero peraltro, che, sebbene in generale nascano maschj più che femine, nella massa comune però dei viventi trovasi maggior numero di donne, che di uomini, ma l' eccesso, esaminando le citate Tavole del Toaldo, si vede, ch' è di donne adulte di età superiore alla media, le quali

li già potevano aver preso stato matrimoniale, e figliato, e se alcune pochissime non lo presero, il loro celibato ormai è cosa indifferente alla Società, e perciò la Cattolica Disciplina non ha motivo sufficiente di cambiar Leggi, nè i celibi Laici, purchè non viziosi, di cambiare il loro stato. Piuttosto, parlando politicamente, un tal eccesso posteriore di donne proverebbe, che lo Stato Monastico di questo sesso nelle condizioni civili sarebbe più lodevole nelle vedove adulte, che nelle nubili giovani. Ma di riflessioni politiche per me basti. Farò piuttosto, come saprò, più di riflessioni fisiche.

Osservo primieramente, che la serie dei 12 medj delle maggiori somme totali secondo l'ordine dei mesi notati inferiormente giunta al massimo nel colmo dell' estate, indi si abbassa sino a tutto l'Inverno, e poi risorge in Primavera similmente, come fa la vegetazione, dal che pare, che la generazione generalmente cresca, e cali periodicamente secondo l' aumento, e decremento del calore atmosferico. Di fatto dalla somma dei 12 termini di detta serie il medio che si ricava, è 200, 87 $\frac{1}{2}$, il quale molto si approssima al medio di Ottobre 201, 93, mese in cui dopo la metà s'incontra il più costantemente il calor medio dell'anno: e unendo a parte li medj dei sei mesi dall' equinozio d' Autunno a quello di Primavera, e li medj degli altri sei mesi vengono le somme, 1095, 35, e 1315, 14, le quali stanno quasi, come 47: 53 proporzione generale, come osservò il Toaldo (Sagg. Meteor. P. 7) del calore d' inverno a quello di Estate. La sola discrepanza, che si scorge tra il progresso della generazione, e il progresso del calore si è, che sebbene la generazione proceda con certa uniformità. ed il suo massimo arrivi in Luglio, mese del maggior caldo atmosferico, la sua diminuzione però da questo mese si prolunga oltre Gennajo, mese del minor caldo, o sia del più gran freddo, ed arriva sino a Marzo; ma di tal discrepanza si può renderne la ragione, e mi pare così.

Primo: anche nell' ordine della generazione animale, come negli altri ordini naturali, per legge d' inerzia l' effetto dovrà con-

continuare a diminuirsi qualche tempo dopo che ha finito la diminuzione della causa; secondo: se il calore atmosferico, quando eccede la misura media, è, come pare, un forte stimolo alla generazione; quando è minore, e più ch' è minore, o sia cangiato in freddo, rinvigorisce le fibre animali, e per questa causa il vigor della generazione deve qualche poco sostenersi nei mesi freddi: terzo fra la gente di Villa, sopra cui si estende la maggior parte dei miei Registri, in quei mesi cessano dalle maggiori fatiche, ed anche per questo gli Individui allora sono più robusti: quarto finalmente da Gennajo sino a due terzi di Febbrajo, al qual termine si estende (in complesso di molti anni) la durata media del Carnovale, v' è nei paesi di Villa il maggior numero di Matrimonj novelli, e quindi il numero dei concepimenti alquanto maggiore di quello sarebbe.

Ma di più, che il calor atmosferico sia una causa dominante progressiva, e costante delle generazioni nella specie umana, lo provano li seguenti confronti. Sommando a parte tutti li nati della prima metà di Aprile, o sia di Luglio secondo l' ordine dei mesi inferiori, e tutti quelli della seconda metà, trovo li primi 3680, e li secondi 3573, e i giorni del maggior caldo dell' anno sono quelli della prima metà di Luglio; il caldo di Ottobre è il medio, circa, di tutto l' anno, e in questo mese la generazione, come sopra notai, è nel suo medio vigore.

Resta però ancora da spiegarsi nella sopra notata discrepanza dei tre mesi la maggiore anomalia del mese di Marzo, in cui sebbene il calore alquanto si sviluppi, la generazione non risorge, ma è la più debole; ed ecco quello, che mi pare. La macchina animale, che fu prima rinforzata dal freddo, e per cui si sostenne un poco il vigor della generazione, allo sviluppo del tenue caldo di Marzo si rilassa, e tal grado di caldo non supplendo col suo eccitamento a quanto essa perde di forza, non può esaltare li di lei principj generativi. In oltre è d'avvertirsi, come in tal mese ripigliando i villici le maggiori fatiche, le fibre delle loro macchine tanto più s' indeboliscono.

Così è generalmente, come apparisce della generazione consi-

siderata sommariamente di mese in mese; ma nei tempi intermedj il ricorrimento dei notabili suoi aumenti non procede uniformemente, ma in certo modo ondeggiando similmente, come l' ineguale alternativa delle annuali Meteore atmosferiche, ed anzi tanto segue l' ordine di tal' alternativa, che, supposta la media durata della gravidanza di nove lunazioni, piuttosto che di nove mesi solari, siccome pensano le mammane, ed alcuni Medici, trovo che i concepimenti siccome sono così vicini ai giorni di piccole, mediocri, o grandi Meteore di qualche sorta, che non si può non riconoscerne nelle stesse, cioè nell' azione, che le produce, o le promuove, del fuoco elettrico allora più copioso la comune causa, azione che tanto bene si manifesta anche negli altri animali allora più commossi, che in altri tempi, siccome osserva il divino Virgilio (I. Georg.).

Tum liquidas corvi presso ter gutture voces
Aut quatuor ingeminant, et saepe cubilibus altis
Nescio qua praeter solitum dulcedine lacti
Inter se foliis strepitant; juvat imbribus actis
Progeniem parvam, dulcesque revisere nidos.
Haud equidem credo, quia sit divinitus illis
Ingenium, aut rerum fato prudentia major.
Verum ubi tempestas, et coeli mobilis humor
Mutavere vias, et Jupiter humidus austris
Densat, erant quae rara modo, et quae densa relaxat;
Vertuntur species animorum, et pectora motus
Nunc alios, alios dum nubila ventus agebat
Concipiunt. Hinc ille avium concentus in agris
Et laetae pecudes, et ovantes gutture corvi.

Per esempio in Gennajo la maggior somma dei nati trovasi nel giorno 17, e seguono due altre somme maggiori del medio notato a piedi di pagina 187, 87, e nove mesi prima cioè in Aprile, come si vede nel Calendario Meteorologico riformato del Toaldo (Giornal. Astrometeor. 1776) i giorni dal 17 sino alla fine sono pericolosi per li temporali; in Febbrajo dai 14 sino ai 21 v' è una serie di somme maggiori, e in Maggio s' incontrano gior-

ni temporaleschi specialmente il 17, e 18, poi il 24, e il 25; in Marzo superiori notabilmente al medio dei nati sono le somme dei giorni 11, 14, 15, e 25, e in Giugno giorni pericolosi per le gragnuole notati sono dal 13 al 17, e parimente pericolosi sono i tre ultimi giorni; in Aprile i nati dei 20, 21, 22 di molto eccedono il numero medio, e in Luglio i giorni 20, 21, 22 sono torbidi, e pericolosi, e frapposti 4 giorni belli ritornano giorni di temporali, o di vento. In somma scorrendo tutto il mio Calendario trovo, che alle maggiori somme dei nati di certi giorni v' è; nove mesi addietro o solari, o lunari, o luni-solari, per lo più una corrispondenza di meteore di qualche sorta. Pare dunque, che non altra possa essere la causa generale dell' alternativa del maggior numero delle nascite, o sia dei concepimenti. Passo ad un' altra ricerca.

La somma dei maschj alla fine d' ogni mese risulta, come notai da principio, maggiore sempre della somma delle femine; ma pure vi sarebbero mesi, e giorni, nei quali la natura propende sopra la proporzione media a generazione più di femine che di maschj? Nel da me composto Calendario veramente se ne scorgono. Ricavata la proporzione media dei maschj alle femine, e lasciata negli originali numeri, sta come 103, 53 : 97, $34\frac{1}{2}$, la differenza è di 6, come notai superiormente; e con questa scorrendo li medj dei mesi a piedi di pagina si vedono propendenti alle femine Dicembre, Gennajo, Febbrajo, Maggio, Giugno, Agosto, ma più di tutti Dicembre, e degli altri Febbrajo. Ciò stando, sembra, che non si possa ripeterlo, che dall' indole differente dei detti mesi più turbolenti degli altri. Dicembre certamente è al sommo caliginoso, nevoso molto, piovoso ancora, brumoso; del pari quasi caliginoso, e nevoso, ventoso, freddissimo è Gennajo; Febbrajo per lo più è tutto di mal tempo, cioè nevoso, e piovoso a vicenda; Maggio è il più piovoso di tutti (almeno lo era sino a 40 anni fa) con frequenza di temporali; Giugno meno piovoso sì, ma ugualmente temporalesco, e grandinante; Agosto è per lo più il mese dei più forti turbini.

In

In particolare poi quanto ai giorni più fecondi di femine, che di maschj veggo, che parecchj ce ne sono non solo nei mesi propendenti a questo sesso, m'ancora nei mesi ritenuti, e quello che mi pare osservabile si è, che nove mesi solari, o lunari avanti le nascite, ma piuttosto lunari, come vedremo più sotto, ai giorni feminini, come in totalità ai mesi che vi propendono, corrispondono generalmente le meteore più grandi, o più insigni, quantunque la somma totale dei nati maschj, e femine insieme sia per lo più in detti giorni minore, cosa che si rimarca anche, quando nelle maggiori nascite d'ambi li sessi insieme v'entra un eccesso di femine sopra i maschj, o parità, o piccola differenza in numero dai medesimi. Noterò alcuni di tali giorni, e per non tediare, uno soltanto, due, o tre d' ogni mese.

In Gennajo il giorno 18 dà la nascita di 119 femine, e di 99 maschj solamente, mentre il medio di femine di tutto il mese è 90, e quello di maschj 97; e ritrocedendo ad Aprile al principio del novemestre Luni-solare trovo nel Calendario Meteorologico il giorno 23 piovosissimo, e se il periodo fosse piuttosto Lunare v' è il 25 giorno oscuro, e piovoso coi seguenti soggetti a temporali, e tempeste. Nel giorno 26 di Febbrajo le femine nate sono 124, e superano di 35 li maschj, li superano anche di 10 nel dì precedente, e sono quasi in parità nel dì a quello anteriore; e in Maggio tanto intorno al principio del supposto periodo, quanto dalla fine ascendendo sino al giorno 25 trovo notati giorni soggetti alle tempeste più degli altri, specialmente il 25. Il giorno 9 di Marzo dà femine 124, maschj solo 109, ed abbondanti di femine, cioè o con eccesso sopra i maschj, o in parità, sono li giorni 21, 22, 24, 25; e scorgo in Giugno corrispondenti al principio dei nove mesi lunari tre giorni intorno S. Pietro pericolosi per le gragnuole, e prima il giorno 21 corrispondente al principio di nove mesi solari pericoloso similmente. Di Aprile il giorno 29 dà femine 141, che sono 35 più che i maschj, e il giorno 30 dà parità; e trovo in prossima corrispondenza di nove mesi solari li giorni da 27 a 31 Luglio temporaleschi, o ventosi, specialmente il 28, e in prossima corrispondenza di 9 mesi lunari

trovo il giorno 3 d' Agosto notato oscuro, soggetto a temporali, e in maggiore corrispondenza li giorni 6, e 7 ancora temporaleschi. Il giorno 6 di Maggio dà femine 24 sopra 97 maschj, e sono in parità li maschj, e femine ne'due giorni precedenti; e in Agosto in corrispondenza di nove mesi solari li giorni 6, e 7 sono temporaleschi, e in corrispondenza di nove lunari, il giorno 14 è brutto, soggetto a temporali, il 15 piovoso, e si noti in mese per lo più asciutto. Di Giugno il giorno 4 dà 20 femine sopra 96 maschj, il precedente ne dà 14 sopra 108, il seguente due più che in parità; e ritrocedendo a Settembre mese per lo più bello sino all' Equinozio, al principio di nove mesi Luni-solari s' incontra l'ottavo giorno notato sciroccale, e il seguente ventoso. Nel giorno 25 di Luglio le femine sono 19 sopra 98 maschj, il 24 diede parità, 4 di più il 23, e parità il 22; e in Ottobre in corrispondenza a nove mesi Luni-solari il giorno 28 è piovoso molto, il 29 caliginoso; in corrispondenza a nove solari li giorni 22, 23, 24 procellosi, e in corrispondenza a nove Lunari il dì 2 di Novembre piovoso, e ventoso insieme. Di Agosto il giorno 11 dà femine 15 sopra 92 maschj, il 13 ne dà 15 ancora sopra 80; e il principio di nove mesi Luni-solari intorno il dì 15 di Novembre cade in giorni piovosi molto, e inclinanti alla neve, di nove solari intorno il dì 10 cade in giorni caliginosi, e di nove lunari intorno il 20 in giorni piovosi, o nevosi, o procellosi. Il giorno 3 di Settembre dà femine 21 sopra 86 maschj, il 2 ne diede 8 sopra 90, e il 4 dà parità; e in corrispondenza di nove mesi Luni-solari trovasi intorno li 8 Dicembre la neve cominciare a farsi frequente, e regnare ancor più le nebbie, e in corrispondenza di nove solari il giorno 2 piovoso molto, il 4 parimenti, e più sotto in corrispondenza di 9 lunari giorni caliginosi. Ottobre ha il giorno 21 abbondante di 24 femine sopra 84 maschj, e i due precedenti di 18, ed 8; e di Gennajo intorno il giorno 24, principio di nove mesi Luni-solari sono notati sette giorni oscuri, o nevosi, o ventosi, o caliginosi, fra' quali vien e a comprendersi anche il principio dei nove mesi puramente Lunari, e il giorno 16 che sarebbe il principio, circa, di nove mesi solari, è notato

ca-

caliginosissimo, e ventoso. Il giorno 2 di Novembre dà femine 19 sopra 87 maschj, il giorno 1, e il 3 dà parità; e in Febbrajo il giorno, intorno cui sarebbe il principio dei nove mesi Luni-solari, è notato caliginoso, e cattivo, e in corrispondenza di nove solari il principio cade fra li primi quattro giorni marcati come cattivi, specialmente il 3, e in corrispondenza di nove lunari cade il loro principio tra il 12, e il 13, li quali sono nevosi. Finalmente Dicembre ha il giorno 5, che dà femine 12 sopra maschj 82, il giorno 6 che dà parità; e ritrocedendo al principio di nove mesi Luni-solari s' incontrano in Marzo giorni inclinanti alla neve li 10, 11, 12, e il 12 specialmente procelloso, poco avanti sarebbe il principio dei nove mesi solari, e cominciano allora i venti, poco dopo sarebbe il principio dei nove lunari, e ritornano ancora giorni tristi, coperti, e più ventosi. Parecchi altri giorni poi abbondanti di nascite feminili compariscono nel mio Calendario, ed a tutti, nove mesi prima, corrispondono giorni sempre di meteore distinte, ma al maggior numero meteore le più forti, ed estese, come notai superiormente. In fatti sembra, che siccome il Filosofo, quando in riscaldo trovasi, ed in sconcerto delle sue idee, teorie concepisce incomplete, e confuse, così la natura nelle maggiori turbolenze dell' Atmosfera per troppa effervescenza seguire non possa nella generazione la legge della proporzione media, e però ordisca maggior numero d' imperfetti individui, che di perfetti. Terminerò la Memoria con un problema, e sia questa l' ultima ricerca.

Essendo dato il giorno di natività, e supposto come noto il giorno di concepimento, trovare la prossimamente vera durata media della gravidanza.

Questa durata per un numero di molte prove sembra scopribile. Già nei giorni del mio Calendario, come si osserva, ai più grandi numeri di nascite in totalità, ed agli eccessi di femine sopra i maschj, nove mesi addietro corrispondono insigni meteore, o giorni oscuri, e turbolenti. Suppongo dunque per dato concesso interinalmente, che la gravidanza compiasi tra il fine di nove mesi lunari, e il fine di nove solari, e nel mio Calendario

rio segno di ogni mese quell'uno, o più giorni disgregati, ne'quali o è maggiore il numero delle nascite in totalità, o è maggiore l'eccesso delle femine sopra i maschj, e se vi sono più giorni di questa sorta l'uno all'altro successivi, ne segno il giorno centrale; ciò fatto nel Calendario Meteorologico Toaldiano tra li principj dei due periodi novemestri solare, e lunare, che sono tra se distanti, in numero rotondo, giorni 9, segno il giorno della maggiore meteora, o il giorno centrale, se più giorni di seguito vi sono procellosi, o torbidi, e se dentro non vi trovo tal giorno, fuori segno quello di meteora, ch'è contiguo all'uno, o all'altro principio. Raccolgo poi tutti gl'intervalli, quali siensi, che trovo tra li segnati giorni di nascita, e supposto concepimento, li dispongo in colonna, e li trovo al numero di 34, e fatta la somma viene un numero di giorni 9053, che diviso per 34 dà giorni 266, ore 6, minuti 21, e sarebbe questa la durata media della gravidanza.

La somma di nove Lunazioni medie dà giorni 265, ore 18, non contando li minuti; chi avrebbe creduto trovarsi tanta prossimità? Ma la prossimità sarà in fatto maggiore, perchè comunemente li Registri dei Battesimi (certo nelle Ville) sono posteriori alle nascite, l'istante delle quali non suolsi indicare; e se di tutti li Registri suppongasi un ritardo medio di ore 12, la conclusa durata della gravidanza si pareggia bene con la somma di nove Lunazioni. Per li risultati di anni 51 con 32 intervalli aveva prima trovato giorni 265 ore 20, che per la detrazione di ore 12 quì considerate resterebbe minore di quasi mezza giornata di nove Lunazioni. La Tavola dei sopraindicati intervalli segue dopo il Calendario.

Questo è il poco che mi parve dover notare, e riflettere sopra i risultati, che ricavai. Il Fisiologo mi perdoni, se osai entrare in ricerche di suo diritto; vi entrai come Aritmetico, e Meteorista. Se pertanto vengano trovate buone le mie ricerche, sarò maggiormente contento di aver contribuito alla scienza fisica dell'uomo per la costruzione del calendario in Italia l'unico, credo di questo genere, e lavoro più esteso in risultati generali;

e di-

e distinti di quanto porge oltre monti con osservazioni di soli anni 14 il Sig. Vargentin in una memoria del 1772 alla R. Accademia delle Scienze di Stockolm.

N. B. *Nei medj delle Tavole seguenti si sono trascurate le frazioni, aggiungendo un' unità, quando la frazione eccedeva la metà d' un intiero.*

	GENNAJO			FEBBRAJO			MARZO		
	Maschj	Femine	Somma	Maschj	Femine	Somma	Maschj	Femine	Somma
1	92	90	182	115	85	200	102	101	203
2	88	77	165	115	106	221	116	117	233
3	84	72	156	114	137	251	116	111	227
4	71	70	141	107	87	194	119	120	239
5	79	74	153	107	76	183	109	108	217
6	102	90	192	93	85	178	126	110	236
7	104	80	184	92	83	175	128	98	226
8	93	81	174	107	97	204	110	107	217
9	95	77	172	118	90	208	109	124	233
10	77	92	169	112	119	231	102	117	219
11	100	97	197	85	107	192	122	130	252
12	84	98	182	116	109	126	117	121	238
13	112	96	208	100	97	197	110	112	222
14	115	72	187	143	97	240	134	120	254
15	103	100	203	102	107	209	118	123	241
16	96	90	186	118	120	238	116	109	225
17	119	106	225	113	108	221	115	104	219
18	99	119	218	100	110	210	107	93	200
19	100	108	208	110	101	211	127	99	226
20	85	85	170	108	111	219	127	120	247
21	114	84	198	118	112	230	104	120	224
22	98	99	197	107	100	207	104	122	226
23	90	73	163	117	94	211	125	117	242
24	104	96	200	117	114	231	118	117	235
25	103	100	203	121	131	252	133	129	262
26	112	96	208	89	124	213	135	95	230
27	101	115	216	85	83	168	129	115	244
28	89	89	178	109	118	227	109	123	232
29	95	88	183	28	24	52	111	102	213
30	106	88	194	Som	me Me	dj di	137	112	249
31	108	104	212	gio	rni	28	137	94	231
Somma	3018	2086	5824	3038	2908	5946	3672	3490	7162
Medj	97	91	188	109	104	212	118	113	231

	APRILE			MAGGIO			GIUGNO		
	Maschj	Femine	Somma	Maschj	Femine	Somma	Maschj	Femine	Somma
1	129	134	263	133	122	255	108	100	208
2	128	134	262	129	135	264	107	101	208
3	110	118	228	134	127	261	108	122	230
4	139	102	241	102	101	203	96	116	212
5	114	130	244	104	105	209	96	98	194
6	125	100	225	97	121	218	124	99	223
7	109	131	240	128	116	244	109	97	206
8	125	111	236	120	121	241	95	93	188
9	139	116	255	133	137	270	101	108	209
10	129	120	249	141	125	266	98	99	197
11	123	129	252	131	125	256	110	96	206
12	97	117	214	123	129	252	99	105	204
13	146	125	271	131	101	232	118	116	234
14	129	111	240	123	98	221	123	97	220
15	136	124	260	120	115	235	127	90	217
16	106	112	218	133	136	269	138	86	224
17	98	130	228	129	107	236	109	109	218
18	139	102	241	107	119	226	109	98	207
19	113	93	206	126	125	251	127	100	227
20	152	119	271	121	104	225	109	100	209
21	131	138	269	124	96	220	103	95	198
22	131	123	254	124	120	244	105	93	198
23	126	95	221	94	122	216	98	92	190
24	112	113	225	115	109	224	110	99	209
25	136	99	235	98	102	200	90	102	192
26	143	117	250	117	103	220	100	96	196
27	123	97	220	116	111	227	97	86	183
28	112	108	220	107	102	209	94	106	200
29	109	141	250	114	102	216	119	131	250
30	127	128	255	123	88	211	103	94	197
31				113	110	223			
Somme	3736	3517	7253	3710	3534	7244	3230	3024	6254
Medj	125	117	242	120	114	234	108	101	208

	LUGLIO			AGOSTO			SETTEMBRE		
	Maschj	Femine	Somma	Maschj	Femine	Somma	Maschj	Femine	Somma
1	90	79	169	115	104	219	109	89	198
2	120	88	208	112	110	222	90	98	188
3	108	106	214	120	86	206	86	107	193
4	89	92	181	100	103	203	100	101	201
5	116	84	200	98	110	208	78	87	165
6	105	90	195	95	83	178	91	102	293
7	79	98	177	115	108	223	103	96	199
8	91	86	177	103	87	190	99	92	191
9	101	84	185	109	109	218	96	102	198
10	114	112	226	116	100	216	88	91	179
11	114	86	200	92	107	199	93	86	179
12	118	116	234	115	95	210	96	111	207
13	103	88	191	80	95	175	104	98	202
14	131	97	228	102	80	182	98	98	196
15	120	95	215	127	97	224	89	102	191
16	106	112	218	113	104	217	88	75	163
17	118	109	227	100	86	186	109	101	210
18	111	91	202	89	82	171	125	86	211
19	99	108	207	108	86	194	91	110	201
20	116	98	214	107	100	207	96	101	197
21	108	99	207	90	95	185	111	98	209
22	100	100	200	116	93	209	102	84	186
23	110	114	224	102	95	197	105	114	219
24	84	85	169	137	104	241	102	103	205
25	98	117	215	90	97	187	97	89	186
26	108	100	208	91	89	180	93	103	196
27	100	74	174	98	91	189	108	91	199
28	97	96	193	112	100	212	97	100	197
29	95	97	192	97	80	177	110	96	206
30	106	88	194	98	91	189	91	97	188
31	117	99	216	88	99	187			
Somme	3272	2988	6260	3225	2966	6191	2945	2908	5883
Medj	106	96	202	104	96	200	98	97	198

	OTTOBRE			NOVEMBRE			DICEMBRE		
	Maschj	Femine	Somma	Maschj	Femine	Somma	Maschj	Femine	Somma
1	117	96	207	91	95	186	100	90	190
2	95	99	194	87	106	193	68	69	137
3	116	93	209	86	88	174	66	71	137
4	90	85	175	75	84	159	57	68	125
5	91	89	180	96	86	182	82	94	176
6	100	76	176	91	77	168	59	60	119
7	95	98	193	89	102	191	77	64	141
8	99	117	216	94	77	171	69	73	142
9	84	82	166	97	81	178	76	64	140
10	82	85	167	103	106	209	74	49	123
11	79	88	167	91	80	171	78	78	156
12	79	80	159	102	77	179	68	59	127
13	111	72	183	98	67	165	76	72	148
14	95	95	190	101	86	187	76	68	144
15	90	87	177	78	90	168	61	71	132
16	103	82	185	85	77	162	75	55	130
17	101	84	185	80	83	163	58	63	121
18	95	91	186	97	81	178	74	43	117
19	93	101	194	91	98	189	65	74	139
20	89	107	196	71	72	143	75	62	137
21	84	108	192	91	82	173	74	67	141
22	90	82	172	75	78	153	72	67	139
23	101	87	188	79	73	152	92	78	170
24	87	104	191	65	81	146	84	68	152
25	100	92	192	74	72	146	64	53	117
26	112	86	198	86	66	152	95	79	174
27	91	61	152	91	72	163	82	70	152
28	98	111	209	86	80	166	79	81	160
29	80	90	170	59	72	131	73	65	138
30	104	98	202	85	87	172	69	49	118
31	88	69	157				70	69	139
Somme	2939	2795	5734	2594	2476	5070	2288	2093	4381
Medj	95	90	185	86	83	169	74	68	141

Supposto giorno di concepimento	Dato giorno di Natività	Intervallo
Da 23 Aprile a	15 Gennajo	giorni 268
7 Maggio	3 Febbrajo	271
25 Maggio	15 Febbrajo	266
5 Giugno	25 Febbrajo	269
8 Giugno	2 Marzo	266
9 Giugno	4 Marzo	267
21 Giugno	14 Marzo	266
3 Luglio	25 Marzo	271
11 Luglio	1 Aprile	264
20 Luglio	13 Aprile	267
27 Luglio	21 Aprile	268
3 Agosto	26 Aprile	266
7 Agosto	2 Maggio	268
17 Agosto	10 Maggio	266
19 Agosto	16 Maggio	270
8 Settembre	3 Giugno	268
23 Settembre	13 Giugno	263
6 Ottobre	29 Giugno	266
12 Ottobre	3 Luglio	264
23 Ottobre	12 Luglio	262
23 Ottobre	15 Luglio	265
2 Novembre	23 Luglio	263
6 Novembre	2 Agosto	269
10 Novembre	7 Agosto	270
20 Novembre	15 Agosto	268
2 Dicembre	24 Agosto	265
3 Gennajo	23 Settembre	263
14 Gennajo	3 Ottobre	262
21 Gennajo	8 Ottobre	260
3 Febbrajo	28 Ottobre	267
17 Febbrajo	10 Novembre	266
25 Febbraio	19 Novembre	267
10 Marzo	1 Dicembre	266
1 Aprile	23 Dicembre	266
	Somma giorni	9053
	Medio giorni	266 6^h 21′ 11″

RISPOSTA

DI PAOLO RUFFINI

AI DUBBJ PROPOSTIGLI DAL SOCIO

GIAN-FRANCESCO MALFATTI

SOPRA LA INSOLUBILITA' ALGEBRAICA

DELL' EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO.

Ricevuta il dì 27 Giugno 1805.

Dopo di avere esposto un metodo generale (T.° 4.° Accad. di Siena) onde tentare la soluzione di tutte le Equazioni algebraiche, e dopo di avere con questo sciolte non solo le Equazioni generali de' primi tre gradi, ma alcune eziándio delle Equazioni particolari di grado 5°, avea ben diritto l' illustre Geometra il Sig. Professore Gian-Francesco Malfatti di cercare lo scioglimento di alcuni suoi dubbj (T.° XI. Soc. Ital. delle Scienze) sopra un Teorema, che impossibil dichiara la soluzione algebraica delle Equazioni generali di grado superiore al 4°. Io poi, il quale con fermezza asserisco una tale impossibilità, ed a cui gl' indicati dubbj vengono dal Chiarissimo Autore indirizzati, era in debito di risolverli, e di confermare così viemaggiormente la mia Proposizione. Nella presente Memoria avendo io adunque procurato di soddisfare a questo mio dovere, desidero di esservi riuscito, e di avere in tal guisa corrisposto all' onorevole invito dell' Egregio Socio il Sig. Malfatti. A lui frattanto protesto fino da questo punto i sentimenti più vivi di gratitudine sì per la compiacenza, che Egli ha avuta di chiedere a me la soluzione de' suoi dubbj, sì per le cortesi espressioni, con cui nel tempo stesso mi onora, espressioni, ch' io, sapendo pur bene di non meritare, riconosco siccome un puro tratto di animo gentile, e

pie-

pieno di degnazione, sì finalmente perchè mi lusingo, che la risposta a tali difficoltà, e lo scioglimento di altre, che io stesso in conseguenza di sua domanda sonomi proposto, possa spargere più chiara luce su di questa Proposizione, e farne meglio, e più generalmente conoscere la verità.

PARTE I.

Risposta ai Dubbj del Sig. Malfatti.

Prima di prendere ad esaminare gli accennati dubbj siami permesso indicar brevemente il metodo, ed i principii, per cui giungo a dimostrare l' insolubilità algebraica delle Equazioni generali di grado non inferiore al 5.°

1. Esposte da prima nel (Cap. 5.° della mia Teor. delle Equazioni) le sublimi riflessioni, che il sommo Geometra Lagrange propone rapporto alle Trasformate algebraiche (Réflex. sur la Résolut. algébr. des Équat. Memoir. de Berlin. pour l'an 1771), ed esposto quindi il suo metodo generale, onde scuoprire *a priori* il loro grado, trovare il valore dei coefficienti, ed eseguire così una Trasformazione algebraica qualunque, propongo nel (Cap. 8.° della stessa Teor.) la soluzione, che lo stesso Chiarissimo Lagrange nella citata Memoria ci dà dell'importantissimo Problema: dati i valori diversi di una funzione algebraica tra le radici della Equazione proposta, determinare dipendentemente da essi i valori corrispondenti di un' altra funzione delle radici medesime.

2. In seguito considerando la soluzione algebraica di una Equazione generale determinata di un grado qualunque, dico nel (n.° 227 della Teor. delle Equazioni) con Lagrange (Réflex. etc. Sect. 4. n.° 86), che questa soluzione, non potendosi ottenere immediatamente, deve cercarsi, riducendo l'Equazion data ad un' altra di grado inferiore, o dello stesso grado, di cui ci sia nota la soluzione, e dalle radici della quale possiamo in seguito determinare le radici della proposta. Riflettendo poscia, che questa sola osservazione non è generale abbastanza, affine di tutte

tutte comprendere le strade, che ci posson condurre alla soluzione algebraica di una data Equazione, nei (n.i 25, 26 della mia Memor. sopra la insolub. delle Equazioni ec. Soc. Ital. Tom. X) aggiungo quanto segue

„ Data a risolversi un' Equazione algebraica determinata .

„ (F) $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.} + V = 0$,

„ o questa è tale che può immediatamente ridursi alla forma

„ (V) $(x+b)(x^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \text{ec.}) = 0$

„ oppure all' altra

„ (VI) $(x+a)^m + b = 0$,

„ in cui a, b, c, d, ec. siano funzioni razionali dei coefficienti della (F), o non è capace di simile riduzione. Nella prima di queste ipotesi potremo sempre avere immediatamente uno dei valori della x soltanto con la divisione, o con l' estrazione della radice *mesima*; poichè, eseguita questa operazione, e trasportati i termini cogniti nel secondo membro, sarà nel primo caso $x' = -b$; e nel secondo $x' = -a + \sqrt[m]{-b}$. Ora, prescindendo dall'indicato trasporto de' termini cogniti, osservo, che tra le sei operazioni algebraiche altra non ve n' ha, che praticata su di un' Equazione (F) possa da se sola darci immediatamente un valore della x, se non la divisione, e l' estrazione della radice, poichè per queste sole l' esponente della x può diventar minore; e osservo inoltre, che la divisione, e l' estrazione della radice non possono immediatamente aver luogo sulla (F), e darci immediatamente la x al grado 1.°. se non quando essa (F) à corrispondentemente una delle forme (V), (VI). Dunque nell' ipotesi seconda, mentre cioè la (F) non può tosto ridursi alla forma (V), oppurre alla (VI), non potremo avere alcuno dei valori della x, se non che riducendo la (F) ad altra Equazione, la quale abbia per incognita la x medesima, od altra lettera, e la quale sappia risolversi, e possa in seguito colle sue radici somministrare immedia-

„ diatamente, o mediatamente alcune, o tutte le radici
„ della proposta.

„ Sia

„ (VII) $z^n + Mz^{n-1} + Nz^{n-2} + \text{ec.} = 0$

„ l' Equazione, a cui supponghiamo in questa seconda ipo-
„ tesi, che venga ridotta la (F), e dalle cui radici ottenute
„ possansi in seguito dedurre i valori della x. Questa (VII)
„ o è capace essa pure di ricevere giusta il (n.° prec.) una
„ delle forme (V), (VI), o non lo è; se lo è, otterremo im-
„ mediatamente, nella maniera indicata uno dei valori
„ della z; e se non lo è, per avere un simil valore, conver-
„ rà trasformare la (VII) in un' altra

„ (VIII) $y^p + Py^{p-1} + Qy^{p-2} + \text{ec.} = 0$,

„ le cui radici determinate ci possano somministrare le ra-
„ dici della (VII). Rinuovo sulla (VIII) lo stesso discorso,
„ e se questa Equazione può acquistare una delle solite for-
„ me (V), (VI), allora avremo tostamente il valore di una
„ delle sue radici, se no, per ottenerlo converrà ridurre
„ tale Equazione ad un' altra.

„ (IX) $u^q + Ru^{q-1} + Su^{q-2} + \text{ec.} = 0$,

„ dalle radici della quale possansi ricavare i valori della u.
„ Lo stesso si dice della (IX), e di tutte le altre Equazioni,
„ che possonsi ottenere successivamente.

„ Quindi si vede che, qualunque siasi la (F), se essa non ha
„ una delle forme (V), (VI), e se d' altronde è capace di so-
„ luzione, converrà necessariamente, che sia riducibile ad
„ altre Equazioni (VII), (VIII), (IX), ec. l' ultima delle quali
„ sia capace di ricevere una delle forme accennate: se ciò
„ non fosse, dovremmo continuare la serie delle Trasfor-
„ mate (VII), (VIII), (IX), ec. all' infinito, e mai non giun-
„ geremmo ad ottenere un valore algebraico determinato,
„ per mezzo del quale si possa poscia scuoprire, ascenden-
„ do, qualcuna delle radici della (IX), della (VIII), della
„ (VII), e finalmente della (F).

3. Stabilisco così il principio fondamentale, a cui deve ne-

ces-

cessariamente appoggiarsi qualunque metodo capace di somministrare la soluzione algebraica di un' Equazione data. Nel (Cap. 12.° Teor. delle Equazioni) considero la soluzione delle Equazioni algebraiche generali di 3.°, e 4.° grado, e riguardo a quella di 3.° ritrovo da prima con Lagrange *a priori* potersi essa benissimo ridurre ad un' Equazione di 2.° grado (prec. 1.°); determino quindi attualmente una tale Equazione, e chiamata essa $y^2 + Sy + T = 0$ (n.° 230. Teor. delle Equaz.), osservo non potersi dalle sue radici y', y'' dedurre immediatamente i valori delle radici della Equazione proposta. In conseguenza di ciò ricerco dalle y', y'' i valori di un'altra funzione Z radice di un'Equazione $Z^3 - M = 0$ avente il solo primo, ed ultimo termine, e dai tre valori della Z, che per la natura dell' Equazione $Z^3 - M = 0$ possonsi sempre determinare, deduconsi attualmente i valori delle tre radici richieste.

Rapporto alla Equazion generale di 4.° grado truovasi nel (n.° 246. Teor. delle Equaz.) parimenti *a priori*, che può essa ridursi ad una trasformata di 3.° grado $y^3 + Sy^2 + Ty + V = 0$ n.° 247. Teor. delle Equaz.), e da uno qualsivoglia dei valori della y nel (n. 248. Teor. delle Equazioni) si vede potersi determinare le radici della Equazione data a due a due, e ciò per essere il suo esponente 4 numero composto.

4. Dalle Equazioni di 3.°, e 4.° grado passo a considerare le Equazioni algebraiche generali in primo luogo di quinto, e poscia di un grado qualunque (Cap. 13.° Teor. delle Equaz., Mem. della Insolub. delle Equaz. ec. T. X. Soc. Ital. delle Scienze), e riguardo alla Equazione di 5.° nel (n.° 30. Mem.) mi esprimo come segue „Essendo questa generale, e però prescindendo da „ qualunque valore particolare, e da qualunque particolare rap„ porto fra le sue radici, non potrà ricevere secondo il (n.° 2.) „ nè l' una nè l' altra delle forme (V), (VI), nè potrà avere al„ cun fattore razionale, e però non ne potremo avere la soluzio„ ne, se non che dipendentemente da una trasformata, dalle cui „ radici possansi ricavare i valori della x. Tale trasformata ven„ ga rappresentata dalla (VII).„

Essendo in questa (VII) la z quella funzione dipendentemente dalla quale deggiono immediatamente determinarsi le radici della Equazione data; nei (n. 31, 32 Memor.) dimostro, che l' esponente n di tal trasformata deve necessariamente esser multiplo, od uguale al cinque, e quindi, che potrà rappresentarsi con la

(X) $$z^{5k} + Mz^{5k-1} + Nz^{5k-2} + \text{ec.} = 0 ,$$

e in conseguenza dei (n. 24, 28. Mem.) asserisco nel (n.° 33. Mem.) che questa (X) non è suscettibile giusta il (n.° 2.) nè della forma (V), nè dell' altra (VI). Dunque per determinare, aggiungo nel (n.° 34. Mem.), „ il valore della funzione z, converrà ridurre la (X) ad altra Equazione, di cui conoscasi la soluzione, „ e dalle cui radici possansi dedurre le radici della (X). Sia la „ (VIII) questa nuova Equazione. Essendo la y funzione delle „ z', z'', ec., e le z', z'', ec. funzioni delle x', x'', ec., sarà ancora „ la y funzione delle x', x'', ec. „. Ora distinguo il caso, in cui l' esponente p della (VIII), per la natura della funzione y, risulta multiplo del cinque, dall' altro in cui non risulta tale; e nel primo di questi casi rifletto (cit.° n.° 34. Mem.), che ciò stesso, che si dice della (VII), ossia della (X), si applica eziandio alla (VIII), e però quella difficoltà medesima, che incontrasi nella determinazione della z, incontrandosi ancora nella ricerca della y, la considerazione di questo caso osservo che diviene inutile.

5. Che se la y è tale, che l' esponente p non risulti multiplo di 5; dovendo sempre essere $p < 6$, oppure > 5, comincio dal supporre nel (n.° 36. Mem.) $p < 6$, e però nel caso presente < 5. Ora qualunque traformata abbiasi dalla Equazione generale $x^5 + Ax^4 + \text{ec.} = 0$, le cui radici siano i valori diversi di una funzione delle x', x'', ec. x^v algebraica, e razionale, e il cui esponente sia < 5; tale trasformata, dissi, pel (n.° 14. Mem., n.° 276. Teor.) non può mai superare il grado 2.° Ciò dunque essendo, considerata nella (VIII) la y funzione algebraica, e razionale delle x', x''. x^v, ec. giacchè se si ponesse irrazionale, questa supposizione pei (n. 244, 157, 158 Teor.) non farebbe, che rendere la trasformata corrispon-

pondente di un grado troppo alto, essa (VIII), per la ipotesi di $p < 5$, dovrà diventare.

(XI) $y^2 + Py + Q = 0$, oppure $y + P = 0$.

Considerando in seguito nel (n.° 37 Mem.) la prima di queste Equazioni „ Dai due valori „, io dico „ della y quelli devon- „ si dedurre della z; ma $5k$ ci esprime il numero totale di que- „ sti ultimi, onde tra essi $\frac{5K}{2}$ devon dipendere da y', ed altrettan- „ ti da y''. Dunque non essendo il 5 divisibile per 2 esattamente, e dovendo essere $\frac{5K}{2}$ numero intero, ne viene, che supposto „ $\frac{K}{2} = h$, dovremo, nel cercare q' da y', necessariamente cade- „ re in un' Equazione di grado multiplo del 5, e che chiamerò „ $5h$. Sia

„ (XII) $z^{5h} + gz^{5h-1} + \text{ec.} = 0$

„ tale Equazione: le sue radici saranno i valori della z corrispon- „ denti ad y', ed i coefficienti g, ec. saranno funzioni razionali di „ essa y'. „ Avvertasi, che in questo caso nella Equazione (X) si considerano attualmente contenuti tutti i valori della z corrispondenti ad y', ed insieme tutti i corrispondenti ad y'', siano i primi tra questi uguali, o siano disuguali dai secondi.

6. „ Determinati „ aggiungo nel (n.° 38. Mem.) „ col „ mezzo della y i coefficienti g, ec., rifletto, che i modi diver- „ si, con cui dalla (XII) può in seguito ottenersi il valore z', sono

„ 1.° Immediatamente, volendosi, che la (XII) abbia, se è „ possibile, secondo il (n.° 25.) una delle forme (V), (VI).

„ 2.° Mediatamente, essendo la (XII) riducibile ad una ter- „ za Equazione, dalla quale ricavisi poscia immediatamente il valore z'.

„ 3.° In fine, perchè si voglia, che la terza Equazione, a „ cui riducesi la (XII), non possa darci il valore di z', che col „ mezzo di riduzioni ulteriori. „

7. Per questa determinazione della z, comincio fra gli espo-

sti tre mezzi a considerare il 2.°, e poichè per questo 2.° la Equazione (XII) deve ridursi ad un' altra, la quale ci somministri immediatamente il valore z', rifletto, che quest' altra Equazione, acciocchè dia immediatamente il valor, che si cerca, dovrà avere per incognita la z medesima, ed avere una delle forme (V), (VI). Ciò essendo, suppongo in primo luogo, che l' Equazione, a cui la (XII) verrà ridotta, abbia la forma (VI), cioè sia della forma $(z+a)^5 - M = 0$. In tale ipotesi col mezzo dei (n. 39, 40, 41, 42. Mem.) dimostro, che il coefficiente M della supposta $(z+a)^5 - M = 0$, dovendo dipendere dai coefficienti g, ec. della (XII), e però dalla radice y' della prima delle Equazioni (XI) (n.° 5), non si può in modo alcuno ottenere, se non risolvendo un'Equazione $M^{6i} + \text{ec.} = 0$ priva sì dell' una, che dell' altra delle solite forme (V), (VI), e priva pei (n. 45, 28. Mem.) di qualunque fattore, i cui coefficienti vogliansi funzioni razionali de' coefficienti suoi, nella quale deve essere $i = 1$, oppure $= 2$ (n.° 41. Mem.) Ora nei (n. 43, 44, 45. Mem.) si dimostra, che, volendosi la precedente M^{6i} ec. $= 0$ ridurre ad altra Equazione $N^q + \text{ec.} = 0$, o ad altre quante si vogliano Equazioni successive $N^q + \text{ec.} = 0$, $P^r + \text{ec.} = 0$, ec., queste risultano sempre o insolubili, o inutili alla determinazione dei valori di M. Dunque trovandosi questo coefficiente M indeterminabile (n.° 47. Mem.), sarà in questo primo caso indeterminabile l' Equazione $(z+a)^5 - M = 0$, a cui si vuole, che venga ridotta la (XII). Nel (1.° n.° 46. Mem.) osservo poi, che l' indicato coefficiente M non può nemmeno determinarsi, allorquando si voglia, che la trasformata della (X) (n. 4, 5.) sia la seconda delle Equazioni (XI), cioè la $y + P' = 0$.

8. Nel (2.° n.° 46. Mem.) suppongo nella Equazione (VIII) $p > 5$, e prosieguo, dicendo „ Essa (VIII) pei (n. 34, 22, 28 „ Mem.) non può avere nè l'una, nè l'altra delle forme (V), (VI), „ nè può avere fattore razionale (n.° 28. Mem.). Dunque affin- „ chè possa ottenersene la soluzione, converrà ridurla all'altra „ (IX), dalle cui radici si possano ricavare i valori della y „.

Ora

Ora se si vuole nella (IX) l'esponente $q < 5$, dimostro, che dai valori della u non possonsi ottenere quei della y, e se si vuole q non < 5, per ottenere i valori della u, è necessario ricorrere ad una quarta Equazione, sulla quale applicansi gli stessi discorsi, che sonosi fatti sulle (VIII), (IX), e così in progresso. Dunque per quanto si progredisca avanti la serie delle trasformate (VII), (VIII), (IX), ec., avendo sempre luogo le stesse conseguenze, concludo nel (n.° 47. Mem.) essere sempre impossibile la determinazione algebraica del coefficiente M nella $(z+a)^5 - M = 0$.

9. Mediante in seguito i (n. 48, 43 Mem.) dimostro che qualunque altro dei mezzi accennati nel (n.° 6) si scelga per la determinazione della z dalla (XII), sempre succede, che desso o non può aver luogo, o diviene inutile. Dunque qualunque supposizione si faccia, l'algebraica determinazione della z dalla y non può mai ottenersi, nè mediatamente, nè immediatamente (n.° 48. Mem.).

10. In conseguenza di tutto questo asserisco finalmente nel (n.° 49. Mem.), che un'Equazione generale di 5° grado è incapace di soluzione algebraica.

Difatti non possiamo, io dico, determinare il valore delle sue radici, se non determinando prima il valore di una loro funzione z (n.° 4) radice della Equazione (X). Ora i valori di questa z non possono pel (n.° 4) ritrovarsi se non mediante le radici di un'altra trasformata, che ho supposto essere la (VIII), e le radici di questa (VIII) pei (n. 4, 8) non sono determinabili, se non nel caso, in cui il suo esponente p sia < 5, e quindi, per quanto si è detto nel (n.° 5.), in cui abbiasi p non > 2. Dunque la determinazione della z nella (X) non potrà cercarsi, se non dipendentemente da una quantità y' radice di una delle Equazioni (XI). Ma i valori della z dipendenti dal valore y' sono necessariamente fra loro diversi a cinque a cinque (n.° 5) Dunque nel cercare dipendentemente da questo y' somiglianti valori, dovremo necessariamente cadere in Equazioni della forma $(z+a)^5 - M = 0$, ossia $Z^5 - M = 0$, fatto $z + a = Z$ (n.° 38. Mem.), oppure della forma $z^{5h} + gz^{5h-1} + \text{ec.} = 0$ (comprendendosi in tali forme

ezian-

eziandio la Equazione $(N + a)^{5h} - T = o$, ossia, fatto $(N+a)^h = Y$, la Equazione $Y^5 - T = o$, e l' altra $N^{5h} + aN^{5h-1} +$ ec. $= o$ del (n.° 43. Mem.)). Ora rapporto alle Equazioni della prima forma abbiam dimostrata sempre impossibile la determinazione del coefficiente M (n.° 7.), e riguardo alle Equazioni della seconda forma abbiam dimostrata sempre impossibile la determinazione della incognita (n.° 9.). Dunque risultando sempre impossibile determinare il valore della funzione z, dovremo pel (n.° 4.) necessariamente concludere, essere eziandio impossibile la determinazione algebraica delle x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}.

11. Nei precedenti (n. 4, ec. 10.) ho esposto il metodo, e le proposizioni, col mezzo delle quali dimostro la impossibilità della soluzione algebraica della Equazione generale di 5° grado nella Memoria sovracitata: non sono diverse le Proposizioni principali (n. 276., ec. 283. Teor.), che pruovano l' impossibilità medesima nella mia Teoria delle Equazioni: ma simili proposizioni vengono nella Memoria dimostrate dipendentemente da' raziocinii, i quali e sono più semplici, e non esigono, siccome quelli della Teoria (n. 271, 273. Teor.), certe operazioni attuali. Inoltre nella Memoria, qualunque fosse il grado delle trasformate, non si è mai perduto di vista quanto per tutta esattezza si è indicato nel prec. (n.° 2.), ossia nei (n. 25, 26. Mem.); e nel (n.° 28. Mem.) dimostrasi, per la generalità dell' Equazione proposta non potere una trasformata qualsivoglia avere giammai alcun fattore, i coefficienti del quale siano funzioni razionali de' coefficienti proprj. Tanto poi nella Memoria, come nella Teoria le dimostrazioni appoggiansi tutte alle proposizioni; 1° che le radici della trasformata sono necessariamente funzioni delle radici della Equazione proposta, e però che chiamate x', x'', x''', ec. le radici di questa, ed y l'incognita di quella, deve essere $y = f(x')(x'')(x''')$ ...(n.° 88. Teor., 1° Intr. Mem.); 2° che posta la $f(x')(x'')(x''')$ .... pei (n. 241, 157, 158. Teor., 3.° Intr. Mem.) razionale, la nostra trasformata ha necessariamente tante radici fra lor differenti, quanto è il numero dei risultati di valore tra loro diver-

verso, che nascono dalla $f(x')(x'')(x''')\ldots$ per tutte le possibili permutazioni fra le x', x'', x'''. ec. (n. 92, 99 Teor.); e 3.° che non può ottenersi soluzione algebraica di un' Equazione generale qualsivoglia, se non seguendo o direttamente, o indirettamente il metodo accennato nel (n.° 227. Teor.), e a tutto rigore l' accennato nei (n. 25, 26. Mem.). Ognuno poi può agevolmente vedere da se medesimo, che i raziocinii, i quali dimostrano tanto le proposizioni esposte nei precedenti (n. 4, ec. 10.), come le altre, che a queste servono di base, prescindono pienamente tanto nella Memoria, come nella Teoria da qualunque argomento di analogia con le Equazioni di grado inferiore al quinto, ed ognuno finalmente può veder da se stesso, che, eccettuato il radical quinto da anteporsi alle radici dell' Equazione $Z^5 - M = 0$, in cui dico essere $Z' = \sqrt[5]{M}$, non determino mai, nè considero in alcun modo nè nella Teoria, nè nella Memoria, quali specie di radicali possansi, o si debbano contenere nei valori delle radici sì della Equazion data, che delle trasformate, allorchè tali valori vogliansi espressi per quantità note; e ciò perchè in tutti i miei discorsi non riguardo le radici della data, che come determinabili unicamente da quelle di una trasformata, e non riguardo le radici delle trasformate, che nell' aspetto di funzioni delle radici della proposta.

12. Nulla dirò sopra la insolubilità algebraica delle Equazioni di grado superiore al 5°, sì perchè le proposizioni, di cui nella Parte seconda della Memoria mi servo a dimostrarla, quantunque prescindano da qualsivoglia argomento di analogia con le Equazioni di grado inferiore, pure non sono essenzialmente diverse dalle proposizioni, che servonmi a dimostrare la insolubilità della Equazione generale di grado 5°, sì perchè il Chiarissimo Sig. Professor Malfatti non muove, rapporto ad esse, dubbio veruno, e passerò piuttosto ad indicar brevemente quanto contiensi nella sua Memoria (Tom XI. Soc. Ital. delle Scien.), ed a rispondere in seguito ai dubbj, che in questa vengon proposti.

13. Dimostrate Egli nella citata Memoria alcune proprietà del-

delle radici della unità (T. XI. Soc. Ital. pag. 580., ec. 588.), sulle quali verrà luogo altra volta di fare qualche riflessione, espone, introducendo alcune picciole differenze non essenziali, l'elegante suo metodo generale, onde sciogliere le Equazioni, che già pubblicò Egli stesso nel Tomo 4° dell'Accademia di Siena; ed ottenuta con tal metodo la soluzione delle Equazioni generali di 2°, di 3°, e di 4° grado (pag. 589. ec. 592.), lo applica in seguito alla Equazione di 5° (pag. 592. ec.). Osservato, che da questa ultima ottienesi col suo metodo una trasformata, che Egli chiama *risolvente*, di 6° grado (pag. 596, 602.), soggiunge (pag. 603.), che col medesimo artifizio da questa prima risolvente di 6° una seconda se ne ritrae di grado 20° riducibile tosto ad un'Equazione di grado 10°, e da tale Equazione osserva potersene in egual modo ricavare una risolvente terza, quindi una quarta, ec. Applica Egli frattanto il suo metodo alla soluzione dell' Equazione particolare $x^5 + 5.2x^3 + 5^2.2^2 = 0$ (pag. 599.), e indicato derivarsi da essa una risolvente

$z^6 - 5^5.2^5z^3 + 841.5^4.2^8z + 571.5^5.2^{10} = 0$ (pag. 602.), la quale è fornita del fattor razionale $z + 5.2^2$ (pag. 604), col mezzo del valore -5.2^2, che ottienesi da simil fattore, accenna nella (pag. 606.) ricavarsi la radice $x = \sqrt[5]{2^2} - \sqrt[5]{2^3} - \sqrt[5]{2^4}$. Divisa poscia per $z + 5.2^2$ la precedente Equazione $z^6 - 5^5.2^5z^3 + \text{ec.} = 0$, e ridotta essa così ad un' altra di 5° grado, indica (pag. 605.) ottenersi da questa pure una risolvente dotata di una radice razionale, e col mezzo di questa radice determinarsi un altro valor della z, cioè il valore $z = 2^2 - 2\sqrt[5]{2} - 2^2\sqrt[5]{2^2} - 11.2\sqrt[5]{2^3} + 7.2\sqrt[5]{2^4}$. Se la $z^6 - 5^5.2^5z^3 + \text{ec.} = 0$, riflette Egli finalmente (pag. 605.), non fosse stata divisa per $z + 5\,2^2$, ma si fosse trattata col solito metodo, ne sarebbe venuta una terza risolvente, dalla cui radice ottenuta in conseguenza di un fattor razionale, sarebbesi in fine ricavato lo stesso precedente valore $z = 2^2 - 2^3\sqrt[5]{2} - \text{ec.}$

14. Mentre l' illustre nostro Autore espone, ed applica all' Equazione $x^5 + 5.2x^3 + 5^2.2^2 = 0$ il suo metodo, e mentre eseguisce, oppure accenna semplicemente le corrispondenti operazioni, espone eziandio i suoi dubbj rapporto alla impossibilità di sciogliere algebraicamente la Equazione generale di 5° grado. Tutti questi dubbj poi riguardano unicamente o i radicali, che possonsi contenere nelle quantità, che si cercano (pag. 596, 597, 598, 603, 604); o i fattori razionali, che possono essere nelle successive risolventi, e la continuazione delle risolventi medesime (pag. 589, 596, 597, 603, 606, 607.); o finalmente una certa analogia fra le Equazioni di 5°, e quelle di grado inferiore, da cui Egli dice essere io stato guidato ne' miei discorsi (pag. 596, 597, 598).

Dopo di avere io nei precedenti (n. 2, cc. 11.) riassunte, ed accennate le proposizioni, per cui vengo a dimostrare l' insolubilità algebraica della Equazione generale di 5° grado; ora sarà necessario, che esponga specificamente le sovraindicate difficoltà del Sig. Malfatti, onde tra queste, e le mie osservazioni possa agevolmente instituirsi il dovuto confronto.

15. Cominciando pertanto dai dubbj, che da lui si promuovono sopra i radicali, che possonsi contenere nelle quantità da determinarsi, e sopra la supposta analogia, veggo, che Egli, dopo di aver fatto, giusta il suo metodo $x+fm+f^2p+f^3q+f^4n=0$, in cui f rappresenta una delle radici 5^e immaginarie della unità (pag. 593), dopo di avere inseguito ritrovato, che in conseguenza della supposizione di $mn=g$, e di $pq = u$ (pag. 593.), deve risultare

$m=\sqrt[5]{\mathrm{F}\,ug}$, $n=\sqrt[5]{\mathrm{F}'\,ug}$, $p=\sqrt[5]{\mathrm{F}''\,ug}$, $q=\sqrt[5]{\mathrm{F}'''\,ug}$ (pag. 596), e dopo di avere asserito dipendere il valor dell' incognita ug da un' Equazione particolare di 6° grado, come realmente apparisce dal (n.° XIV. della sua sovracitata Memoria esistente nel T.° 4° dell'Accademia di Siena), soggiunge nella stessa (pag. 596).

„ In tal caso è chiaro, che al più il valore di ug non viene „ espresso, che con funzioni di radici cubiche di noto valore, e

„ che il simbolo m, e così dicasi degli altri, ha per valore una
„ $\sqrt[5]{}$ di funzione di $\sqrt[3]{}$. Il Socio Ruffini vorrebbe, guidato dall'
„ analogia delle Equazioni di grado inferiore al quinto, che sot-
„ to alla $\sqrt[5]{}$ del valore di m vi fossero le funzioni di $\sqrt[4]{}$, e
„ quindi supponendo che tutte le forme di funzioni di $\sqrt[4]{}$ doves-
„ sero essere comprese in un' Equazione di 4° grado razionale,
„ conclude, che la data risolvente di 6° grado debba avere tre
„ radici uguali, la qual cosa non verificandosi nella generale ri-
„ solvente, giudica impossibile la soluzione generale delle Equa-
„ zioni di 5° grado. „

16. „ Opporremo, Egli prosiegue, due riflessioni a questa
„ sua decisione. La prima: che vi possono essere dell' Equazio-
„ ni, in cui l' incognita sia eguale a funzioni di radici quarte
„ contenenti dentro di se radici inferiori, essendo esse Equazio-
„ ni di grado superiore al quarto, senza che si possano dividere
„ in fattori razionali di 4° grado, come avverrebbe nell'Equazio-
„ ne $E^{12} + 8E^9 - \text{ec.} = 0$ „ (pag 597.) „ la quale non è divisi-
„ bile nè in uno, nè in tre fattori razionali di quinto gra-
„ do, quantunque una delle sue radici non sia altro che

$$E = \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\sqrt[3]{2\sqrt{2}}.$$

17. „ Egli è ben vero, che la nostra risolvente di 6° grado
„ non può ammettere un divisor razionale di grado duodecimo
„ al 6° superiore; ma perchè non potrebbe egli trovarsi un simil
„ divisore razionale nella risolvente della nostra Equazione di
„ 6° grado, che diventerebbe la seconda risolvente della nostra
„ proposta di quinto; e non trovandosi in questa, perchè, pas-
„ sando alla terza risolvente, non potrebbe aver luogo in essa
„ un simil divisore, e lo stesso dicasi delle risolventi ulteriori;
„ cosicchè, ritrovato finalmente tal divisore razionale, e ascen-
„ dendo di mano in mano sino alla prima risolvente di 6 grado,

„ si

„ si possa realmente ottenere il valore di z „ (quì si sostituisce la nuova incognita z, e ciò per la ipotesi, che fa il nostro Autore nel citato n.° XIV. della sua Memoria Accademia di Siena, di 25 *ng* $= z + 5a^2 - \frac{5c}{3}$) „ che, non sia altro, che funzione di radici „ contenenti sotto di se altre funzioni di radici inferiori? E ciò „ sempre supposto, che fosse necessario sotto alle radici quinte „ dei valori di m, n, p, q aver funzioni di radici quarte.

18. „ In secondo luogo non so vedere dalla risoluzione del- „ le Equazioni inferiori al quinto un' analogia così imperiosa, „ che mi costringa ad ammettere tale necessità; prima, perchè „ troppo pochi sono i gradi inferiori dai Geometri risoluti; poi „ perchè anche nelle Equazioni di 4° abbiamo veduto, che ef- „ fettivamente la loro generale risolvente è un' Equazione di 6° „ grado, ciascuna delle cui sei diverse radici è idonea a dare il „ valor del primo fattore $x + m + r + n$ dell' Equazione di 4° „ grado. Questo è il nostro secondo dubbio promosso sulla di- „ mostrazione del Socio Ruffini.

19. „ Io non so vedere difficoltà alcuna nel concepire, che „ nel valore di $m = \sqrt[5]{Fz}$ possano aver luogo funzioni di radici „ seste, perchè derivate da Equazioni particolari, e non da „ Equazioni generali di sesto grado, le quali radici seste com- „ prendano anche sotto di se funzioni di radici inferiori „ e per pruovare questa sua proposizione adduce il Socio Malfatti l' esempio delle Equazioni biquadratiche, nelle radici delle quali esistono funzioni di radici terze, e di radici seconde vincolate sotto i primi indici di radici quarte, e inseguito nella (pag. 599.) riporta la sovraesposta Equazione particolare $x^5 + 5.2x^3 + 5^2.2^2 = 0$, nella risolvente $z^6 - 5^5.2^5 z^3 + \text{ec.} = 0$ della quale (n.° 13) trovando per radice il valore $z = 2^2 - 2^3 \sqrt[5]{2} - \text{ec.}$ (cit.° n. 13), col sostituirsi di tal valore della z, la quantità m diverrà, soggiunge Egli nella (pag. 604.) „ eguale a $\sqrt[5]{}$ di funzio-

„ ni di altre radici quinte, le quali nel nostro caso non ricevono „ sotto di se nè indici di radici quarte, nè di terze, nè di secon- „ de. Lo stesso si dee concludere per gli altri valori di n, p, q, e „ ciò non ostante se libereremo dagl' irrazionali l' Equazione „ $x+m+n+p+q=0$, verranno talmente cambiate tra loro, „ combinate, e attemperate le funzioni di radici quinte com- „ prese sotto l'indice primo di radice quinta, che da ultimo non „ risulterà, che l' Equazione proposta $a^5+5.ax^3+5^3.a^2=0$, „ nè vi sarà alcun pericolo, che tali funzioni di radici quinte „ comprese sotto il primo vincolo di radice quinta facciano „ ascendere l' Equazione in x a grado più alto del quinto. Ol- „ treciò servendoci del sovraesposto valore di z, o valendoci di „ ciascuno degli altri cinque, che abbraccia la risolvente in z di „ 6° grado, sempre ci ridurremo allo stesso fattore $x+m+n+$ „ $p+q=0$ della proposta nostra Equazione. „ E se ciò accade „ finalmente Egli dice (pag. 599.), „ in un' Equazione particola- „ re, sembra che il buon raziocinio a più forte ragione ciò esiga „ in un' Equazione generale; e siccome per la generale essendo „ di 6° grado la risolvente, deve aver luogo la radice sesta, si „ rende chiaro, che sotto alla radice quinta avremo funzioni di „ radice sesta, che comprendono sotto di se funzioni di radici „ quinte, riuscendo nel nostro caso particolare podestà seste „ perfette quelle funzioni, che si truovano sotto l' indice di ra- „ dice sesta, onde non appariscono altro che funzioni di radici „ quinte.

20. Concederò di buon grado al Sig. Professore Malfatti ciocchè Egli dice nel (n.° 16.), concederò pur anche nel (n.° 19.), che il valore di $m=\sqrt[5]{Fz}$ potrebbe contenere funzioni di radici seste, mentre però la z fosse determinabile, e concessogli ugualmente, quanto nel (cit.° n.° 19.) dice Egli rapporto all' Equazione particolare portata ad esempio, ed al valore $z=a^2-2^3\sqrt[5]{a}-$ ec., non posso poi accordarmi seco lui su quanto nel numero medesimo si conclude. Imperciocchè, se operando sopra

di

di un' Equazione generale, ottienesi un certo risultato, o se accade una certa combinazione tra i suoi coefficienti, o tra le sue radici, comprendendosi da questa generale tutte le rispettive Equazioni particolari, potrà certamente concludersi, che, prescindendo da alcune speciali modificazioni, lo stesso risultato, o la combinazione medesima debbe aver luogo eziandio in una qualunque di queste particolari Equazioni; ma allorchè il risultato supposto, o la supposta combinazione succede viceversa nell'operare su di una data Equazione particolare, non veggo come si possa esiger lo stesso nella corrispondente generale. Alcune proprietà della data Equazione particolare ponno essere a lei speciali in modo, che non appartengano punto alle altre Equazioni particolari dello stesso genere; e ciò essendo, è chiaro, che simili proprietà non potranno appartenere neppure all' Equazione generale. Dunque se il risultato, o la combinazione supposta proviene nella data Equazione particolare in conseguenza delle indicate proprietà speciali, esso, od essa non potrà punto accadere nella Equazione generale. Di questo medesimo sentimento dimostrasi però lo stesso Sig. Malfatti nella (pag. 589.), ove dice „ le Equazioni particolari di qualunque grado possono avere „ delle proprietà non comuni alle Equazioni generiche del me„ desimo grado, come quella di avere un divisore razionale „ di grado inferiore, che le generiche non potranno mai avere, „ e così dicasi di altre proprietà. „

Nell' esempio del Sig. Malfatti la risolvente $z^6 - 5^5 . 2^5 z^3 +$ ec. $= 0$ (n.° 13.) ha per proprietà a lei speciale il fattore $z + 5.2^2$, e in conseguenza di questo, tal risolvente, riducendosi ad un' Equazione in z di 5° grado, ci somministra poi $z = 2^2 - 2^3 \sqrt[5]{2}$ — ec. (n.° 13.); ma un fattor razionale manca in tante altre risolventi dello stesso genere, e manca nella risolvente generale (n.° 11.) Dunque dalla sola osservazione del precedente valore $z = 2^2 - 2^3 \sqrt[5]{2}$ — ec non sarà lecito rapporto alla risolvente generale concludere, che abbia essa radici di forma simile alla indica-

ta,

ta, e che abbia radici, nella espression delle quali sotto la $\sqrt[6]{}$ contengansi dei radicali quinti. Come potrà poi dirsi, che nel nostro caso particolare non appariscano altro, che funzioni di radici quinte, perchè riescono podestà seste perfette quelle funzioni, che si truovano sotto l'indice di radice sesta? L'equazione, che ci somministra l'espressione $z = 2^2 - 2^3 \sqrt[5]{2}$ — ec. non è già un' Equazione propriamente di 6° grado, ma è un' Equazione di grado 5°, quella cioè, a cui la $z^6 - 5^1 . 2^1 z^3 +$ ec. $= 0$ si riduce con la divisione per $z + 5.2^2$.

21. Se l' illustre Socio Malfatti non sa vedere tra l' Equazione di 5° grado, e quelle di grado inferiore l' analogia che accenna nel (n.° 18); io aggiungo di più, che qualunque analogia apparisca, non sarà mai lecito in conseguenza di questa sola asserire l' insolubilità della Equazion generale di 5° grado; come non è lecito a cagion d'esempio asserirne viceversa la solubilità, solamente perchè con i metodi de' Sigg. Eulero, e Bezout, e Malfatti una supposizion medesima ci può portare tanto nella Equazione di 5° come in quelle di 3°, e di 4° a delle trasformate tutte di 6° grado: ma se tale è il mio sentimento, come lo è difatti, e se i raziocinii, che applico alla Equazione di 5° grado (Teor. delle Equaz., Mem. T.° X della Soc. It.) (preced. n. 2, ec. 11.) riguardano tutti in primo luogo l' Equazione algebraica generale di grado m, quindi la generale di grado 5°, e nulla le altre; come può mai dirsi, che nelle mie conclusioni, o ne' miei discorsi sia stato guidato dall' analogia con le Equazioni di grado inferiore (n.° 15.), e muoversi qual dubbio alle mie asserzioni un dubbio, che riguarda l'analogia (n.° 18.)? È vero, che nel (Cap. 12° Teor. delle Eq.) sonosi applicati i principj fondamentali alla soluzione delle Equazioni di 3° e di 4° grado; ma ciò si è fatto puramente, affin di mostrare la generalità di questi principii, far vedere, che tutti i metodi di soluzione *a posteriori* dipendono infine da' principj medesimi, e farci così strada a cercare la soluzione delle Equazioni di grado superiore.

22.

22. Quanto il Chiarissimo Sig. Malfatti espone nei precedenti (n. 16 ec. 19), vedesi, che lo espone affin di obbiettare a ciò, che Egli nel (n.° 15.) asserisce, essersi da me pronunciato, e da cui Egli dice, che io deduco la impossibilità di sciogliere la Equazione generale di 5° grado; ma percorrendo tutti i discorsi, che faccio io tanto nella Teoria, come nella Memoria, onde determinare questa impossibilità (preced. n. 2, ec. 11.), e paragonando essi con quanto si dice nel citato (n.° 15.) volersi da me rapporto alle funzioni di $\sqrt[4]{\ }$, e da me concludersi rapporto alle pretese tre radici uguali nella risolvente di 6° grado, confesso, che non so truovare qual sia tra gl' indicati discorsi quello, che possa aver indotto l' illustre Malfatti ad attribuirmi quanto nel citato (n.° 15.) si contiene. Ciò non ostante, siccome parlo di Equazioni, alle quali deve ridursi la proposta di 5° grado, onde risolversi, e siccome considero la riduzione nel (1° n.° 280 Teor) dell' Equazione in M di 12° grado, ed accenno nel (5° n.° 280. Teor) la riduzione dell' Equazione in N di grado 6°, ad un altra di 4° grado; sarebbe egli mai, che il nostro Autore, considerando come cosa identica il dire una quantità dipende da un' Equazione di 4° grado, e il dire una quantità è necessariamente funzione di $\sqrt[4]{\ }$, abbia dall' uno, o dall' altro dei citati (1°, 5° n.° 280. Teor.) dedotto pretendersi da me essenzialmente esistenti le funzioni di $\sqrt[4]{\ }$ sotto alla $\sqrt[5]{\ }$ del valore di m (n.° 15.)? Se mai ciò fosse, prego l' illustre Socio ad osservare, che, mentre considero la riduzione dell' Equazione in M, e accenno quella dell' altra in N (1°, 5° n.° 280. Teor.) ad un' Equazione di 4° grado, non dico già, che non possansi ottenere i valori rispettivamente della M, e della N senza una tal riduzione: dico solamente, che la M, la quale dipende da un' Equazione di 12°, e la N, che dipende da una di 6° grado, non possono determinarsi, se non riducendo tali Equazioni ad altre, di cui conoscasi la soluzione. Ora tra le Equazioni, che sanno sciogliersi, avvi quella di 4° gra-

grado; dunque nel dimostrare l'indeterminazione delle accennate quantità, conveniva considerare questa riduzione della corrispondente Equazione in M, od N ad altra di grado 4°. Nel tempo medesimo però, e nella medesima maniera ho considerata (1°, ec. 5° n.° 280. Teor.) eziandio la riduzione della stessa Equazione in M, ed N ad un'altra di 3°, e la riduzione ad una di 2°, e la riduzione persino ad una di primo grado; e confesso, che non veggo, come possa aver lasciato luogo a credere, che sotto la $\sqrt[5]{}$ del valore di *m* pretenda doversi contenere funzioni di $\sqrt[4]{}$ piuttosto che funzioni di $\sqrt[3]{}$. Riferendo, come si è detto finora, gl' indicati radicali alle rispettive Equazioni, a me sembra manifesto, che ne' miei raziocinii vengono questi ad esser tutti considerati egualmente, e che, come pretendo non potersi nel valore di *m* sotto la $\sqrt[5]{}$ contenere la $\sqrt[3]{}$; così pretendo non potervi esistere nemmeno la $\sqrt[4]{}$.

Finora ho concesso all'egregio Socio Malfatti, che una quantità, la quale dipenda da un' Equazione di 2°, o di 3°, o di 4° grado contenga nella sua espressione il radicale corrispondente; ma concedere non gli posso, „ che tutte le forme di funzioni di $\sqrt[4]{}$ „ debbano essere comprese in un' Equazione di 4° grado razio- „ nale „ (n° 15.), mentre col nome di *forma* intendasi un espressione, nella quale si contengano le accennate funzioni, come sarebbe per esempio la precedente $\sqrt[4]{3 - \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}}$ (n° 16.), e molto meno posso concedergli, che questa proposizione siasi da me in alcun modo pronunziata, e supposta. Mentre ho supposto di ridurre la data Equazione di 5° grado, o le Equazioni sovracitate in M, ed N ad altre di 4°, o di 3°, o di 2° grado, non l' ho già supposto in conseguenza della proposizion precedente, ma l' ho

l' ho supposto soltanto, onde scuoprire, se le incognite di tali Equazioni sono, o no algebraicamente determinabili.

Ritrovato, che tutte le trasformate, mediate esse siansi, od immediate, della data Equazione generale di 5° grado sono od insolubili, o inutili alla mediata, od immediata determinazione della x (n. 2, cc. 10.); quindi concludo essere impossibile lo scioglimento algebraico di tale Equazione. Ciò dunque essendo, non veggo, come mai il Sig. Malfatti possa dire nel cit.° (n.° 15.), che io „ concludo, che la data risolvente di 6° grado debba avere tre „ radici uguali, la qual cosa non verificandosi nella generale ri„solvente, giudico impossibile la risoluzione generale delle E„ quazioni di 5° grado. „ Converrà dire, che io abbia mancato nelle mie espressioni della dovuta chiarezza, e che abbia forse indotti così i leggitori ad una falsa interpretazione; ma per amore della verità non posso dispensarmi dal protestare, che tanto nella Teoria, come nella Memoria non saprei determinare, quale delle mie espressioni possa aver dato luogo a tale equivoco, e che d' altronde non ho avuta giammai intenzione di asserire, nè ho giammai immaginate 6° grado le precedenti nella risolvente di tre radici uguali, concludendo io l'insolubilità della Equazione generale di 5° grado per tutt' altra cagione (n.° 10.), che per quella, che dal Sig. Malfatti viene indicata (n.° 15.).

23. Nell' assegnare la dimostrazione di questo Teorema, ho già avvertito (n.° 11), che, eccettuata la $\sqrt[5]{M}$, non considero punto la natura degli altri radicali, che potrebbero contenersi nelle radici delle trasformate, e nei valori della x, allorquando simili radici, e simili valori fossero determinabili; ora però rifletto, che la considerazione di questi radicali può somministrarci essa pure un mezzo, onde pruovare la verità del Teoremà medesimo: ma riserbandomi ad eseguir ciò sull' ultimo, prenderemo presentemente ad esaminare quei dubbj (n.° 14), che rimangono tuttora a considerarsi, quei dubbj cioè, i quali riguardano i fattori razionali, che possono contenersi nelle successive risolventi, e la continuazione delle risolventi medesime.

24. Nel precedente (n.° 17) vengono in parte espresse queste ultime difficoltà dell' Egregio Socio Malfatti, e vengono in seguito ripetute in generale nella (pag. 603. Tom. XI Soc. Ital.); ove indicata la prima sua risolvente $z^6 - 2Mz^4 - \text{ec.} = 0$, che avea già specificamente determinata nel (n.° XIV Mem. Malfatti Tom. 4.° Accad. di Siena) „ soggiunge immediatamente, „ „ nella quale manca il secondo termine, e i simboli tra loro in- „ dipendenti non sono, che quattro, il che la esclude dal nu- „ mero delle generiche, „ e la mette nella classe delle Equa- „ zioni particolari di 6.° grado; dal che viene avvertito il Geo- „ metra di cercare prima di tutto, se tale Equazione accetti „ qualche divisor razionale di grado inferiore. Al caso che ciò „ non succeda, parmi, che non si debba concludere essere irre- „ solubile la proposta di 5.° grado, ma che si deggia passare alla „ risolvente di tale Equazione di 6.°, „ e il divisore potrebbe „ in questa trovarsi; rimarrebbe con ciò risoluta l' Equazione „ della prima risolvente, e conseguentemente l' Equazione pro- „ posta di 5.° grado. Non potendosi nemmeno in quest' ultima „ rinvenire tal divisore, e perchè sarò io costretto a giudi- „ care impossibile la ricercata soluzione, senza l' esame previo „ delle ulteriori risolventi, che divengono poi la terza, la quar- „ ta, ec. risolvente della proposta Equazione? „

Onde avvalorare la sua difficoltà considera quì l' illustre Autore (pag. 603, 604, 605) le risolventi, che nascono dalla Equazione particolare $x^5 + 5 \cdot 2x + 5^2 \cdot 2^2 = 0$, e col metodo precedente nella guisa indicata sul fine del (n.° 13) accenna ritruovarsi attualmente il più volte esposto valore

$z = 2^2 - 2^3 \sqrt[5]{2^2} - \text{ec.}$, radice della risolvente prima (n.° 13).

25. Dopo la considerazione di questo caso particolare, aggiunge nuovamente il Sig. Malfatti (pag. 606); „ egli è però, „ che per una generale Equazione in x di quinto grado, man- „ cando tal divisore nella prima risolvente, sono obbligato a cer- „ carne qualcuno nelle risolventi ulteriori, le quali son tutte „ Equazioni particolari, e non generali, nè da quest' obbligo

„ mi

„ mi truovo disimpegnato, se non nel caso, che siami solida-
„ mente dimostrata l'impossibilità di trovare tal divisore „; e finalmente conclude non sembrargli alla dimostrazione del nostro Teorema argomento sufficiente la necessità delle tre radici uguali nella prima risolvente in z di 6.° grado, e sembrargli, che la dimostrazione istessa sarebbe stata più irresistibile, se si fosse raggirata sulla impossibilità di truovare non solo nella prima risolvente in z, ma nemmeno nelle risolventi ulteriori un divisore di grado al 5.° inferiore.

26. Nulla dirò rapporto a quanto ripetesi nel (n.° prec.) delle pretese tre radici uguali, poichè ne ho già parlato a sufficienza sul finire del (n.° 22.); riguardo poi alla continuazione delle risolventi indicata nei precedenti (n.i 17, 24), sembrami, che venga tolto qualunque dubbio da quanto è detto nei (n.i 2, 7, 8). Rapporto finalmente ai fattori razionali, che possono contenersi in queste successive risolventi, e in generale in tutte le trasformate successive, i dubbj dell'Egregio Socio Malfatti meritano alcune riflessioni.

27. Supponghiamo, che dall'Equazione generale (F) (n° 2.) deducasi una prima trasformata, o risolvente, e tale sia la (VII). Ciò fatto osservo in primo luogo, che nel (n.° 28 Mem. sopra la Insolub. ec. T. X. Soc. Ital.) si dimostra, che il primo membro della (VII) non può avere alcun fattore, i coefficienti del quale siano funzioni razionali de' coefficienti proprj; ma possiam dire in egual modo, che non può neppure contenerne alcuno, i coefficienti del quale siano funzioni razionali dei coefficienti della (F)? Sì certamente; e quel discorso medesimo, che nel citato (n.° 28 Mem.) ci pruova la prima di queste proposizioni, ci dimostra eziandio la seconda; avvertendo però, che in questo secondo caso, volendosi i coefficienti a, ec. t, u del fattore $z^r + az^{r-1} +$ ec. $+tz+u$ supposto nel (n.° 28 Mem.) funzioni razionali dei coefficienti della (F), ciascuno di essi deve considerarsi, siccome funzione delle x', x'', x''', ec., e funzione per la generalità della stessa (F), tale che non cambierà di valore, qualunque permutazione

eseguiscasi fra le x', x'', x''', ec. medesime, e quindi nemmeno per la permutazione, onde dalla z' producesi la $z^{(r+1)}$ (n.° 28 Mem). Egli è anzi propriamente da questa proposizione seconda, che dipende il non potersi dalla (VII), acquistare, come è indicato sul fine dello stesso (n. 28 Mem.), la forma (V).

Che se la data Equazione (F) sia particolare; allora la (VII) potrebbe benissimo contenere un fattore $z^r + az^{r-1} + \text{ec.} + tz + u$, i coefficienti del quale siano funzioni razionali o de' coefficienti proprj, o de' coefficienti della proposta, potendo inallora non aver più luogo il raziocinio del (n.° 28. Mem.). Quando di fatti il primo membro della $z^r + az^{r-1} + \text{ec.} + tz + u = 0$ ivi supposta, di cui z', z'', ec. $z^{(r)}$ son le radici, vuolsi divisore del primo membro della (VII), essendo l' Equazione (F) generale; ciascuna allora delle quantità $z'^r + az'^{r-1} + \text{ec.} + tz'$, $z''^r + az''^{r-1} + \text{ec.} + tz''$, ec. $z^{(r)r} + az^{(r)r-1} + \text{ec.} + tz^{(r)}$ non potrà evidentemente essere di valore uguale al valore di $-u$, quando, collocati invece de' coefficienti a ec. t, u, ed invece delle radici z', z'', ec. $z^{(r)}$ i loro valori espressi per le x', x'', x''', ec., non risulti eziandio di forma uguale alla forma dello stesso $-u$; ma nel caso della Equazione (F) particolare, da ciascheduna delle indicate quantità $z'^r + z'^{r-1} + \text{ec.} + tz'$, $z'''^r + az'''^{r-1} + \text{ec.} + tz''$, ec. $z^{(r)r} + az^{(r)r-1} + \text{ec.} + tz^{(r)}$ potrebbe in conseguenza del valore particolare delle x', x'', x''', ec. aversi un valore $= -u$, quantunque, eseguita la precedente sostituzione delle x', x'', x''', ec., ciascheduna di simili quantità divenga funzione di forma diversa dalla forma, che acquista il coefficiente $-u$ (n.i 95, 96 Teor. delle Equazioni). Ora il discorso del (n.° 28 Mem.) esige necessariamente, che le esposte funzioni non possano essere $= -u$, quando non ne siano uguali eziandio nella forma. Dunque ec.

Da quanto abbiamo ora detto, vedesi, che può benissimo esistere, come esiste di fatti, un fattor razionale nella prima risol-

solvente della Equazione $x^5+5.2x^3+5^2.2^2=0$ (n.° 13), e nelle prime di tante altre Equazioni particolari, senza che perciò abbia esso mai luogo nella prima trasformata di un' Equazione generica. Egli è da simil fattore, che la precedente $x^5+5.2x+5^2.2^2=0$ riceve soluzione, quantunque sia insolubile la generale di 5.° grado: e così alcune delle Equazioni, le quali nella Memoria sopra la soluzione delle Equazioni particolari, che è inserita nel (Tomo IX della Soc. Ital.) sono considerate come insolubili, in quantochè non sono riducibili a trasformate di grado al loro inferiore, potranno, in conseguenza di un simil fattore esistente nelle trasformate medesime, realmente ammettere soluzione.

28. Ritenendo la (F) Equazion generale; vogliasi trasformare la precedente (VII) in un'altra Equazione con l'incognita y. Poichè le radici di una qualsivoglia trasformata sono funzioni delle radici della Equazione, da cui deriva; ne viene, che i valori y', y'', y''', ec., ossia le radici della Equazione in y, dovranno essere funzioni delle radici della (VII), ossia delle z', z'', z''', ec.; ma queste z', z'', z''', ec. sono per la ragione medesima funzioni delle x', x'', x''', ec; dunque funzioni di queste x', x'', x''', ec. saranno ancora le y', y'', y''', ec. Supposto pertanto la radice per esempio $y'=f(z')\,(z'')\,(z''')\ldots$, pongansi invece delle z', z'', z''', ec. i loro valori espressi per le x', x'', x''', ec., e s' indichi per $\varphi'(x')(x'')(x''')\ldots$ la funzione, che perciò risulta $=y'$. Ciò fatto, osservo, che posso determinare l' Equazione, da cui dipende questa y' in due maniere, 1.° cercando dalla (F) immediatamente la trasformata in $y=\varphi'(x')(x'')(x''')\ldots$; 2.° cercando non immediatamente dalla (F), ma dalla (VII) la trasformata in $y=f(z')(z'')(z''')\ldots$. Il primo di questi metodi quello si è, che deve sempre, ed unicamente considerarsi tanto nella mia Memoria, che nella Teoria delle Equazioni, siccome apparisce dai (n.^{i} 34, 39, 43, ec. Mem., n.° 280 Teor.), e riducendosi per esso una trasformata seconda ad essere prima, cioè ad essere una trasformata dedotta immediatamente dalla (F); ne segue, che anderà essa pure soggetta al Teorema del (n.° 28 Mem. Tom. X. Soc. Ital.). e quindi non potrà contenere alcun divisore, i coef-

fi-

ficienti del quale siano funzioni razionali de' coefficienti proprj, o dei coefficienti della proposta (n.° 27). Sia $f'(y)=0$ l' Equazione in $y=\varphi'(x')(x'')(x''')\ldots$ ottenutasi con questo primo metodo.

29. Deduciamo ora dalla (VII) l' Equazione in y considerata, giusta la seconda maniera, $=f(z')(z'')(z''')\ldots$ Chiamata $F(y)$ la trasformata, che quindi risulta, osservo in primo luogo, che tutte le radici della $f'(y)=0$ (n.° prec.) devono essere radici eziandio della $F(y)=0$. Imperciocchè, se non lo fossero, essendo già tale la y' (n.° prec.), e per conseguenza avendosi già dalle $f'(y)$, $F(y)$ il comun fattore $y-y'$, con la ricerca del massimo divisor comune fra le stesse $f'(y)$, $F(y)$, si troverebbe esistere nella $f'(y)$ un divisore, i coefficienti del quale sarebbero funzioni razionali de' suoi coefficienti contro del (n.° prec.)

30. Pei principj fondamentali delle trasformazioni (Cap. 5.° Teor.) nascendo i valori y'',y''', ec. tutti dal primo $y=f(z')(z'')(z''')\ldots$ per tutte le permutazioni fra le z', z'', z''', ec., ed essendosi la $F(y)=0$ (n.° prec.) dedotta immediatamente dalla (VII), tutti questi y', y'', y''', ec. saranno necessariamente radici di essa $F(y)=0$. Ridotte ora tutte le quantità y', y'', y''', ec. ad essere giusta il (n.° 28), espresse per mezzo delle x', x'', x''', ec., fissiamo primieramente l' attenzione sopra le due y', y''. Avendosi già $y'=\varphi'(x')(x'')(x''')\ldots$, osservo, se la funzione, a cui si uguaglia la y'', altro non sia, se non che uno dei risultati, i quali nascono dalla $\varphi'(x')(x'')(x''')\ldots=y$ per le permutazioni fra le x', x'', x''', ec., oppure se sia una funzione, la quale non potendo nascere dalla $\varphi'(x')(x'')(x''')\ldots$ per alcuna permutazione, sia diversa da tutti i risultati medesimi. Nel primo di questi casi la y'' pel principio delle trasformazioni sarà, ugualmente che la y', radice della $f'(y)=0$ (n.° 28); ma non lo sarà nel caso secondo. Poichè in questo secondo caso la funzione $=y''$ è di una forma, comunque siasi, diversa dalla forma della $\varphi'(x')(x'')(x''')\ldots$ suppongasi $y''=\varphi''(x')(x'')(x''')\ldots$ con l'incognita y si cerchi dalla (F) immediatamente l' Equazione che ha questa funzione ultima per radice, e si denomini essa $f''(y)=0$. Ciocchè nei (n.i 28, 29)

ab-

abbiam detto della $f'(y) = 0$, vedesi, che si dice egualmente di questa $f''(y) = 0$, e vedesi inoltre, che le $f'(y) = 0$, $f''(y) = 0$ non possono avere radice alcuna comune, perchè se ne avessero, con la ricerca del massimo comun divisore, si troverebbe che amendue le $f'(y)$, $f''(y)$ conterrebbero, contro del (n.° 28), un fattor razionale.

31. Quanto abbiamo ora detto della y'' si applica egualmente alle altre radici y''', y^{v}, ec. della $F(y) = 0$ (n.° 29). Imperciocchè ogniqualvolta queste y''', y^{v}, ec. espresse per le x', x'', x''', ec. (n. 28) non sono che tanti risultati provenienti dalle $y' = \varphi'(x')(x'')(x'') \ldots$, $y'' = \varphi''(x')(x'')(x''') \ldots$ (n.i 28, 30) in conseguenza di permutazioni fra le x', x'', x''', ec.; esse y''', y^{v}, ec. non saranno evidentemente che tante radici delle rispettive Equazioni $f'(y) = 0$. $f''(y) = 0$. Che se queste y''', y^{v}, ec. siano funzioni delle x', x'', x''', ec. tali, che derivar non possano dalle $y' = \varphi'(x')(x'')(x''') \ldots$, $y'' = \varphi''(x')(x'')(x''') \ldots$ per alcuna delle permutazioni fra le stesse x', x'', x'', ec.; allora supposta, come si è fatto nel (n.°prec.) rapporto alla y'', la $y''' = \varphi'''(x')(x'')(x''') \ldots$, la $y^{v} = \varphi^{v}(x)(x')(x''') \ldots$ ec., cercherò immediatamente dalla (F) le Equazioni in y, che hanno per radici queste funzioni fra loro diverse; e ci verranno in corrispondenza altrettante Equazioni, che dirò $f'''(y) = 0$, $f^{v}(y) = 0$, ec., rapporto ad una qualunque delle quali paragonata con le altre, e con le $f(y) = 0$, $f'(y) = 0$, $F(y) = 0$ si verificherà evidentemente quanto nei precedenti (n.i 28, 29, 30) abbiam detto delle $f'(y) = 0$ $f''(y) = 0$.

32. Il primo membro della $F(y) = 0$ nelle supposizioni de' precedenti (n.i 28, 29, 30, 31) altro non essendo, che il prodotto degli altri primi membri $f(y)$, $f'(y)$, $f'''(y)$, $f^{v}(y)$ ec., i quali tutti sono razionali; ne segue, che, allorquando dedurre si voglia non immediatamente dalla (F), ma dalla (VII) una trasformata; che abbia per radice una funzione $y = f(z)(z')(z'') \ldots$; l'Equazione, che ne risulta, potrà benissimo contenere tanti fattori razionali; ma la $F(y)$ che è appunto questa Equazion risultata dalla (VII) (n. 29) pei precedenti (n.i 28, ec. 31) non può contenere altri fattori razionali fuorchè i sovraindicati

$f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$, ec. provenienti tutti dal cercare immediatamente dalla (F) le Equazioni, che hanno per radici le corrispondenti funzioni $y = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots$, $y = \varphi''(x')(x'')(x''')\ldots$, $y = \varphi'''(x')(x'')(x''')\ldots$, ec., e queste Equazioni quelle sono, sulle quali unicamente vertono, come si è notato nel (n.° 28), i raziocinii, e le conclusioni riguardanti l' irresolubilità della Equazione di 5.° grado tanto nella Teoria, come nella Memoria. Dunque allorquando nella (F) si ha $m=5$, e nella (VII) $n > 2$, essendosi esse pei (n.i 34, ec. 48 Mem., n.i 280, ec. 283 Teor., prec. n.° 10) ritrovate sempre od insolubili, od inutili alla determinazione della incognita nella (VII); ne segue, che niun vantaggio può mai risultare alla soluzione della Equazione generica di 5.° grado dai fattori razionali, che possono esistere nella seconda risolvente, o trasformata $F(y)=0$. Ora quei discorsi medesimi, che abbiamo presentemente eseguiti (n.i 28, ec.) sopra di questa seconda, è chiaro, che hanno luogo eziandio sopra una risolvente terza, sopra una quarta, ec.; perchè, mentre si voglia $u = f(y')(y'')(y''')\ldots$ col porre invece delle y', y'', y''', ec. i loro valori espressi per le x', x'', x''', ec., le radici u', u'', u''', ec. divengono tante funzioni esse pure delle x', x'', x''', ec. determinabili solamente per tante Equazioni, i cui primi membri sono come i precedenti $f(y), f'(y), f''(y)$, ec., privi di fattori razionali, e le quali sono in egual modo od insolubilii, od inutil allo scuoprimento della x. Dunque i divisori commensurabili, che possono esistere in quante si vogliono risolventi ulteriori, e che realmente possonvi esistere soltanto, mentre tali risolventi vengano determinate col 2.° dei metodi accennati nel (n.° 28), saranno tutti inutili alla determinazione mediata, o immediata della x nella Equazione generale (F), mentre l' esponente di questa (F) pongasi $= 5$.

33. Da quanto si è detto nei precedenti (n.i 26, ec. 32) in risposta alle difficoltà enunciate nei (n.i 24, 25), e da quanto si è detto nei (n.i 20, 21, 22) in risposta ai (n.i 14, ec. 19) tutti mi lusingo, che vengano dissipati i dubbj, che il Chiarissimo Socio Malfatti si è compiaciuto promuovermi. Affine però di soddisfar pie-

pienamente a quanto Egli, sul finire della sua Memoria, con termini veramente a me troppo onorevoli, e dettati soltanto dalla sua gentilezza si degna richiedermi, veggomi in dovere, prima di terminare questo mio scritto, di sciogliere qualche altro dubbio, che insorger potrebbe a taluno sopra l' insolubilità della Equazione generale di 5.° grado.

PARTE II.

Risoluzione di alcuni altri dubbj riguardanti l' Insolubilità algebraica della Equazione generale di grado 5°.

34. Nella Memoria riguardante questo Teorema si è dimostrato (n.i 21, 22, 24, 33, 35, 41, ec. Mem.), che, posta una funzione fra le x', x'', x''', ec. razionale (n.° 11), ed avente in conseguenza delle permutazioni un numero, che dirò $p > 2$ di valori tra loro diversi, l' Equazione di grado p, da cui tal funzione dipende, non può giammai acquistare la forma (VI) (n.° 2), mentre nella Equazione generale (F) abbiasi $m=5$. Nessuna pertanto delle precedenti Equazioni $f'(y)=0, f''(y)=0, f'''(y)=0$, ec. (n. 28, 29, 31) potrà avere tal forma, mentre il rispettivo esponente sia > 2: ma quantunque ciò si verifichi in queste Equazioni, non potrebbe poi darsi, che non si verificasse nella $F(y)=0$, Equazione formata dal loro prodotto (n.° 32), e che però quest'ultima potesse avere la forma $(y+a)^p + b = 0$, essendo a, b funzioni razionali de' coefficienti della (F), ossia funzioni della forma Funz. $(x', x', x''',$ ec.), (n.i 3, 31, 101, 105 Teor.)? Ecco un dubbio, che credò necessario risolvere, poichè un simile caso non è contemplato nella Memoria, e d'altronde potendosi sempre dalla $(y+a)^p+b=0$ ottenere per lo meno un valore y'; da questo, se fosse possibile, e mentre una delle $f'(y)=0, f''(y)=0, f'''(y)=0$, ec. avesse il suo esponente > 2, potrebbe ricavarsi o mediatamente, o immediatamente il valore della x nella (F).

Supposto pertanto, che l' esponente di una delle $f'(y)=0$, $f''(y)=0$, $f'''(y)=0$, ec. sia > 2, e supposto, se è possi-

bile, che la $F(y)=0$ nata dalla moltiplicazione fra loro di queste Equazioni acquisti la forma $(y+a)^p+b=0$, facciamo $y+a=Q$, la $F(y)=0$ diverrà perciò $Q^p+b=0$. Ritenuto che sia giusta i (n.i 28, 30, 31) $y'=\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $y''=\varphi''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $y'''=\varphi'''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, ec. risultandoci

$Q'=\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)-a=\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)-$
Funz. (x',x'',x''',x'^v,x^v), $Q''=\varphi''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)-$
Funz. (x',x'',x''',x'^v,x^v), $Q'''=\varphi'''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)-$
Funz. (x',x'',x''',x'^v,x^v), ec., le Q',Q'',Q''', ec. cambieranno, e conserveranno il proprio valore per le permutazioni medesime fra le x',x'',x''',x'^v,x^v, per cui lo cambiano in corrispondenza, e lo conservano le y',y'',y''', ec. Chiamata finalmente, come nel (n.° 21 Mem.) α una di quelle fra le radici della Equazione $u^p-1=0$, che con le sue successive potenze produce tutte le altre, per la natura delle radici della unità, dovrà nella $Q^p+b=0$ ciascuna delle Q'', Q''' ec. essere $=Q'$ moltiplicata per una delle potenze $<p$ della α, e potrò quindi supporre $Q''=\alpha^{n'}Q'$. $Q'''=\alpha^{n''}Q'$, ec.

Ciò posto per la generalità della Equazione (F), la Q'', ossia la $\varphi''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)-a$ deve uguagliare la Q', ossia la $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)-a$ moltiplicata per la $\alpha^{n'}$ indipendentemente da qualunque particolar valore, e da qualunque rapporto particolare fra le x',x'',x''',x'^v,x^v. Ora eseguiscasi nelle Q', Q'' una stessa, qualunque siasi, permutazione fra le x',x'',x''',x'^v,x^v, e chiaminsi $Q'1$, $Q''1$ i risultati, che ne vengono: io dico che dovrà essere $Q''1=\alpha^{n'}Q'1$; imperciocchè dovendo la Equazione $Q''=\alpha^{n'}Q'$, per quanto si è detto di sopra, verificarsi indipendentemente da qualunque particolar valore, o rapporto fra le x',x'',x''',x'^v,x^v, essa $Q''=\alpha^{n'}Q'$ deve sempre esser vera, qualunque delle stesse x',x'',x''',x'^v,x^v pongasi corrispondentemente in una qualsivoglia delle parentesi di amendue insieme le funzioni $Q''=\varphi''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)-a$, $Q'=\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)-a$. Avendosi pertanto $Q''1=\alpha^{n'}Q'1$, è chiaro, che se la $Q'1$ risulti $=Q'$, risulterà ancora la $Q''1=Q''$, se la $Q'1$ diviene disuguale dalla Q', diverrà ancora la $Q''1$ differente dalla Q''; e così viceversa

sa la Q'1 risulterà uguale, o disuguale dalla Q', secondochè si vuole, che la Q''1 divenga uguale, o disuguale dalla Q''. Ma ciò stesso, che si è ora detto rapporto alla Q'' paragonata con la Q' nella $Q''=x''^{r}Q'$, dicesi egualmente rapporto alle Q''', Q'^{v}, ec. paragonate ciascuna con la Q' nelle rispettive Equazioni $Q'''=x'''^{r}Q'$, $Q'^{v}=x'''^{r}Q'$, ec. Dunque tutte quelle permutazioni fra le $x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}$, le quali non cangiano il valore della Q', non cangiandolo neppure in ciascheduna delle Q''', Q'^{v}, ec., e quelle permutazioni, le quali producono valore diverso nella prima di queste funzioni, producendolo diverso eziandio in ciascheduna delle altre; ne segue, che chiamato g il numero dei valori differenti, che per tutte le possibili permutazioni fra le $x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}$ ottengonsi dalla Q' compresa la Q' medesima, di numero g saranno ancora tutti i valori diversi, che per tutte queste permutazioni, produconsi da ciascuna delle Q'', Q''', Q'^{v}, ec. compresavi la stessa Q'', oppure Q''', oppure Q'^{v}, ec.

35. Dunque tutte le Equazioni $f(Q-a)=0$, $f''(Q-a)=0$, $f'''(Q-a)=0$, ec. equivalenti alle altre $f'(y)=0$, $f''(y)=0$, $f'''(y)=0$, ec. (n.° 34) avranno il medesimo esponente g; ma i valori della Q, che sono composti da tutte insieme le $f'(Q-a)=0$, $f''(Q-a)=0$, $f'''(Q-a)=0$, ec. devon tutti essere contenuti nella $Q^{p}+b=0$ (n.° 34.), e per ipotesi fatta nello stesso (n.° 34) l' esponente d'una delle $f(y)=0, f''(y)=0, f'''(y)=0$, ec. deve essere >2. Dunque supposto $p=gh$, la $Q^{p}+b=0$ si ridurrà alla $Q^{gh}+b=0$, in cui sarà h un numero intero, e positivo, e sarà $g>2$, onde pel (n.° 14. Mem.) g non <5.

36 Il precedente numero h deve essere >2.

1.° Se si volesse $h=1$ la $Q^{p}+b=0$ divenuta $Q^{g}+b=0$ tutti unicamente conterrebbe i g diversi valori, che per tutte le permutazioni fra le $x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}$ ottengonsi dalla Q' (n.° 34), e per conseguenza non sarebbe già il prodotto delle varie Equazioni $f(Q-a)=0, f''(Q-a)=0$, ec. (n. prec.); ma soltanto una delle medesime; ora b è una funzione della forma funz. $(x', x'', x''', x'^{v}, x^{v})$

ed è $g > 2$ (n.° 35). Dunque, essendo quest' Equazione $Q^g + b = 0$ impossibile (n.i 21, 22, 24 Mem.), sarà ancora impossibile, che abbiasi $h = 1$.

2.° Vogliasi $h = 2$, e la $Q^h + b = 0$ divenga perciò $Q^{2g} + b = 0$. Chiamati in questa ipotesi Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(g) i valori diversi derivati per tutte le permutazioni fra le x', x'', x''', x'^v, x^v nella funzione Q', e Q''1, Q'2, Q''3 ec. Q''(g) i derivati nel modo istesso dalla Q'', cosicchè le prime tra queste quantità siano le radici della $f'(Q-a)=0$, e le seconde le radici della $f''(Q-a) = 0$, osservo che la precedente $Q^{2g} + b = 0$ non può essere che il prodotto di due sole delle Equazioni $f'(Q-a) = 0$, $f''(Q-a) = 0$, $f'''(Q-a) = 0$, ec., e che per conseguenza, supposto $Q^{2g} + b = f'(Q-a) \times f''(Q-a) = 0$, i valori Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q(g), Q''1, Q''2, Q''3, ec. Q''(g) tutte saranno le radici di essa $Q^{2g} + b = 0$.

Ciò posto, moltiplichiamo la radice Q'1 successivamente per le potenze α, α^2, α^3, ec. $\alpha(2g-1)$, $\alpha^{2g} = 1$ della α supposta nel (n.° 34); per la natura della Equazione $Q^{2g} + b = 0$, tutte dovranno quindi successivamente prodursi le sue radici. Ora essendo g non < 5 (n.° 35), e però 2g non < 10, ed essendo la α quale l' abbiam supposta nel citato (n.° 34), io dico, che il prodotto α Q'1 niuna può uguagliare delle quantità Q'2, Q'3, ec. Q'(g), e ciò si dimostra con un discorso perfettamente uguale a quello del (n.° 21 Mem.), avvertendo, che, a cagione di 2g non < 10, tal discorso ha luogo eziandio, allorquando nella permutazione semplice di 1.°, o semplice di 2.° genere (8.° Intr. Mem.), per cui si pretende, che la αQ'1 nasca dalla Q'1, vuolsi, che tutte restino implicate le radici x', x'', x''', x'^v, x^v. Dunque non potendo questa quantità α Q'1 essere uguale, che ad una delle Q''1, Q''2, Q''3, ec. Q''(g), supponghiamo $Q''1 = \alpha Q'1$, dovrà quindi essere pel (n. 34)
$Q''1 = \alpha Q'1$, $Q''2 = \alpha Q'2$, $Q''3 = \alpha Q'3$, ec., e in generale $Q''(n) = \alpha Q'(n)$, essendo n non $> g$.

Si

Si moltiplichi presentemente la Q', per α^2; il prodotto $\alpha^2 Q'1$, niuno potrà uguagliare dei risultati, i quali provengono dalla Q''; imperciocchè se si volesse $\alpha^2 Q'1 = Q''(n)$, avendosi, per quanto abbiam ora detto, $Q''(n) = \alpha Q'(n)$, ne verrebbe $\alpha^2 Q'1 = \alpha Q'(n)$, e però $Q'(n) = \alpha Q'1$, il che abbiam veduto non poter essere. Sia adunque $\alpha^2 Q'1 = Q'2$.

Moltiplicando la Q'1 per α^3, il risultato $\alpha^3 Q'1$ non potrà essere uguale ad alcuno di quelli che nascono dalla Q', perchè se si volesse $\alpha^3 Q'1 = Q'(n)$; avendosi già $\alpha^2 Q'1 = Q'2$, si ritrarrebbe $Q'(n) = \alpha Q'2$, il che nuovamente, per quanto si è detto di sopra, è impossibile. Abbiasi pertanto $\alpha^3 Q'1 = Q''2$.

Col moltiplicare la solita Q'1 per α^4, ne verrà il prodotto $\alpha^4 Q'1$, il quale a niuna può uguagliarsi delle radici della $f''(Q-a) = 0$: perchè se fosse $\alpha^4 Q'1 = Q''(n)$; a cagione di $Q''(n) = \alpha Q'(n)$, si avrebbe $\alpha^4 Q'1 = \alpha Q'(n)$, e però $Q'(n) = {}^3Q'1$, il che si è ora veduto non poter succedere. Pongasi perciò $\alpha^4 Q'1 = Q'3$.

Proseguendo nella stessa maniera, si truova, che nessuno dei prodotti $\alpha^5 Q'1$, $\alpha^7 Q'1$, $\alpha^9 Q'1$, ec. può essere uguale ad alcuna delle radici della $f'(Q-a)=0$, e nessuno degli altri $\alpha^6 Q'1$, $\alpha^8 Q'1$, $\alpha^{10} Q'1$, ec. può uguagliare alcuna delle radici della $f''(Q-a) = 0$, e che perciò potremo sempre supporre $\alpha^5 Q'1 = Q''3$, $\alpha^7 Q'1 = Q''4$, $\alpha^9 Q'1 = Q''5$, ec. $\alpha^6 Q'1 = Q'4$, $\alpha^8 Q'1 = Q'6$, ec.

In conseguenza di questo tutte le radici della $Q^{2g} + b = 0$ si comprenderanno nelle due serie.

$Q'2 = \alpha^2 Q'1, Q'3 = \alpha^4 Q'1, Q'4 = \alpha^6 Q'1, Q'5 = \alpha^8 Q'1$, ec. $Q'(g) = \alpha^{2(g-1)} Q'1 = \alpha^{2g} Q'1$;

$Q''1 = \alpha Q'1$, $Q''2 = \alpha^3 Q'1$, $Q''3 = \alpha^5 Q'1$, $Q''4 = \alpha^7 Q'1$, ec. $Q''(g) = \alpha^{2g-1} Q'1$,

contenendosi nella prima le radici della $f(Q-a)=0$,
e nella seconda le radici della $f''(Q-a)=0$.

Facciamo $\alpha^2 = \beta$, e nella $u^{2g} - 1 = 0$ facciamo $u^2 = t$; tale Equazione diverrà $t^g - 1 = 0$, e le quantità $\beta = \alpha^2$, $\beta^2 = \alpha^4$, $\beta^3 = \alpha^6$, ec. $\beta^g = \alpha^{2g}$ saranno tutte le sue radici, perchè per la natura della α (n.° 34.) le α^2, α^4, α^6, ec. α^{2g}, e però le β, β^2, β^3,

ec.

cc. β^g sono tutte fra lor disuguali, e ci verrà $Q'2 = \beta Q'1$, $Q'3 = \beta^2 Q'$, $Q'4 = \beta^3 Q'1$, ec. $Q(g) = \beta^{g-1} Q'1$, $Q'1 = \beta^g Q'1$. Ora per la natura della $t^g - 1 = 0$ abbiamo la somma semplice delle $\beta^1, \beta^2, \beta^3$, ec. β^g, la somma de' loro ambi, de' loro terni, delle quaderne e in fine la somma de' loro prodotti, a $g - 1$ a $g - 1$ uguale allo zero. Dunque verificandosi ciò ancora nelle quantità $Q'2$, $Q'3$, $Q'4$ ec. $Q'(g)$, $Q'1$, ne segue evidentemente, che l' Equazione $f'(Q - a) = 0$ dovrà avere la forma $Q^g - V = 0$, in cui $V = \pm Q' Q'2 Q'3 \ldots Q'(g)$; ma essendo il prodotto $Q'1 Q'2 Q'3 \ldots Q'(g)$ funzione della forma funz.^{e} $(x', x'', x''', x'^v, x^v)$ (n.° 105. Teor.), ed essendo $g > 2$ (n.° 35), è impossibile, che la $f'(Q - a) = 0$ abbia questa forma $Q^g - V = 0$ (n. 21, 22, 24. Mem.). Dunque sarà ancora impossibile, che nel numero $p = gh$ abbiasi $h = 2$; e per conseguenza dovrà essere $h > 2$.

37. Nella $Q^{gh} + b = 0$ (n.° 35) pongasi $Q^g = R$, ne verrà $R^h + b = 0$. Essendo Q, e però R, funzione delle x', x'', x''', x'^v, x^v (n.° 34), espressa per R' una delle radici della $R^h + b = 0$, e quindi supposto $R' = \Phi'(x)(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, osservo tosto, che le h radici della $R^h + b = 0$ non possono essere i soli diversi risultati, che provengono per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec., x^v dalla sola funzione $\Phi'(x)(x'')(x''')(x'^v)(x^v) = R'$, perchè inallora l' Equazione $R^h + b = 0$ a cagione di $h > 2$ (n.° prec.) (pei n. 21, 22, 24. Mem.) sarebbe assurda. Pongasi pertanto $R'' = \Phi''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $R''' = \Phi'''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, ec., e siano radici della $R^h + b = 0$ i valori diversi, che per le indicate permutazioni ottengonsi da queste varie funzioni R', R'', R''', ec.; chiamato i il numero de' valori provenienti dalla R', come nei precedenti (n. 34, 35) si dimostra, che di numero i sono ancora tutti i valori diversi, che provengono da ciascuna delle altre R'', R''', ec., e però, che chiamato k il numero delle R', R'', R''' ec., avremo $h = ik$, onde la $R^h + b = 0$ diventerà $R^{ik} + b = 0$.

38.

38 Posto nella $Q^g = R$ il valore R' invece di R, sia la Q'_1 (n.° 36) radice della Equazione $Q^g = R'$. Eseguiscasi tanto nella Q'_1, come nella R' una delle permutazioni fra le x', x'', ec. x'^v, e supponghiamo, che per tale permutazione la R' si conservi la medesima, e che la Q'_1 acquisti un valore diverso, che dirò $Q'(a)$. In questa ipotesi io dico, che la quantità $Q'(a)$ sarà essa pure radice della Equazione $Q^g = R'$.

Poichè per la generalità dell' Equazione (F) l'altra $Q'_1{}^g = R$ deve verificarsi indipendentemente da qualunque valore, e da qualunque rapporto particolare fra le x', x'', x''', x'^v, x^v, ne viene che per tutte quelle permutazioni fra le stesse x', x'', ec. x^v, sotto cui la funzione R' conserva il proprio valore, dovrà conservarlo eziandio la $Q'_1{}^g$; ma per la permutazione, onde dalla Q'_1 producesi la $Q'(a)$, la R' per la ipotesi non cambia valore; dunque per la permutazione medesima non dovrà cangiarlo neppure la $Q'_1{}^g$, e per conseguenza avremo $Q'_1{}^g = Q'^g(a)$, perchè questa $Q'^g(a)$ essendo la potenza *gesima* della $Q'(a)$, come la $Q'_1{}^g$ è la *gesima* della Q'_1, è appunto quel risultato, che ottiensi dalla $Q'_1{}^g$ per l' indicata permutazione. Dunque avendosi $Q'_1{}^g = R'$, sarà ancora $Q'_1{}^g(a) = R'$, e però la $Q'(a)$ radice della $Q^g = R'$. Dunque ec.

39. Nell' esponente della Equazione $R^{ik} + b = 0$ (n.° 37) deve essere il numero $i > 2$.

1.° Sia, se è possibile, $i = 1$. Esprimendosi da questo i il numero dei valori diversi, che per tutte le permutazioni fra le x', x'', x''', x'^v, x^v provengono dalla $R' = F'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ (n.° 37), ne segue, che nel caso presente volendosi $i = 1$, e però un solo essendo il valore della R', essa R' per tutte le accennate permutazioni si conserverà sempre la medesima, e sarà quindi una funzione della forma $\Phi'(x', x'', x''', x'^v, x^v)$ (n.° 3. Teor.). Dunque conservando essa R' il proprio valore per tutte quelle permutazioni,

ni, per cui dalla Q'1 nascono le Q'2, Q'3, ec. Q'(g) (n.° 36), ritenuta, come nel (n.° prec.), radice della $Q^g = R$ la Q'1, per lo stesso (n.° prec.) dovranno essere radici della medesima $Q^g = R'$ ancora tutte le altre quantità Q'2, Q'3, ec. Q'(g), ma per la natura della $R' = \Phi'(x', x'', \text{ec. } x^v)$, e per essere $g > 2$ è impossibile, che tutte queste quantità Q'1, Q'2, Q'3 ec. Q'(g) siano radici dell' accennata $Q^g = R'$ (n. 21, 22, 24. Mem.). Dunque sarà ancora impossibile, che abbiasi $i = 1$.

2.° Vogliasi $i = 2$, e siano R'1, R'2 i due soli valori diversi, che per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v acquista la R'. Dai (n. 40, 10 Mem.) è facile a vedersi, che sarà $R'1 = \Phi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $R'2 = \Phi'(x'')(x')(x''')(x'^v)(x^v)$, e che questi due valori corrispondono ai due y', y'' del (n.° 36. Mem.). Pongasi ora R'1 invece della R', e sia Q'1 radice della Equazione $Q^g = R'1$. Essendo due soli i valori provenienti dalla R'; una metà dei risultati, che per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v nascono dalla Q' dovrà corrispondere al primo di questi due valori, cioè ad R'1, e l' altra metà al secondo R'2.

Ciò posto, io dico, che nel caso presente uno qualunque de' risultati della Q', il quale appartenga alla prima delle indicate metà deve essere disuguale da uno qualsivoglia appartenente alla metà seconda. Difatti se accadesse una tale eguaglianza; dipendendo essa necessariamente dalla forma della funzione Q', anche tutti gli altri risultati della metà prima sarebbero in corrispondenza uguali agli altri della metà seconda (n.° 47. Teor.); e però tutti i valori tra loro diversi della Q', cioè tutte le quantità Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(g), (2.° n.° 36.), corrispondendo ugualmente alla R'1, come alla R'2, si otterrebbero coll' eseguire semplicemente sulla $Q' = \varphi(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ tutte quelle permutazioni, per cui la R'1 conserva il proprio valore. Dunque essendo per ipotesi la Q'1 radice della $Q^g = R'1$, tali pel (n.° 38) sarebbero ancora tutte le altre Q'2, Q'3, ec. Q(g); ma ciò pei (n. 41, 24 Mem.) è impossibile. Dunque sarà ancora impossibile, che uno dei risulta-

tati della Q' contenuti nella prima metà corrispondente ad R'1 sia uguale ad uno dei contenuti nell'altra metà corrispondente ad R'2.

In conseguenza di ciò dovendo una metà di tutti i valori fra lor disuguali (2.° n.° 36) Q'1, Q'2, Q'3 ec., Q'(g) corrispondere ad R'1, e l'altra metà ad R'2, il loro numero g sarà pari, e quindi supposto $g = 2l$, e supposto, che Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(l) siano i valori della Q' corrispondenti ad R'1, che Q'($l+1$), Q'($l+2$), Q'($l+3$) ec. Q'($2l$) siano i corrispondenti ad R'2, le prime tra queste quantità saranno radici della $Q^g = R'1$, ossia della $Q^{2l} = R'1$, e le seconde della $Q^{2l} = R'2$. Avendosi poi $g > 2$ (n.° 35), sarà $l > 1$, e però l non < 5 (7° Intr., n.° 40. Mem.).

Poichè la $Q^{2l} = R'1$ contiene un numero $2l$ di radici, essa ne conterrà delle altre oltre le precedenti Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(l); ma per quanto abbiam detto, tali non ponno essere le Q'($l+1$), Q'($l+2$), Q'($l+3$), ec. Q'($2l$), e tutte le radici della $Q^{2l} = R'1$ devono evidentemente esser tanti valori delle Q, ossia devono essere tante radici della $Q^l + b = 0$ (n.° 34). Supposto adunque che ne sia radice la Q''1 (2° n.° 36.), e chiamate Q''1, Q''2, Q''3, ec. Q''(l) quelle tra le Q''1, Q''2, Q''3, ec. Q''(g) = Q''($2l$), che corrispondono ad R'1, esse pure pel (n.° 38) saranno tutte radici della $Q^{2l} = R'1$; e tutte per conseguenza le radici di questa Equazione verranno comprese nelle due serie

Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(l),
Q''1, Q''2, Q''3, ec. Q''(l).

Avendosi l non < 5, e però $2l$ non < 10, un discorso perfettamente uguale a quello del (2° n. 36) ha luogo sopra queste radici, e sopra l'Equazione $Q^{2l} - R'1 = 0$. Dunque quì pure si troverà, che le Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(l) deggiono essere radici di un'Equazione $Q^l - V' = 0$, in cui $V' = \pm Q'1\,Q'2\,Q'3 \ldots Q'(l)$ uguaglia una funzione delle x', x'', ec. x^v, la quale corrispondentemente al valore R'1 non ha che un solo valore; ma tale Equazio-

zione $Q^l - V' = 0$ dotata di queste proprietà a cagione di l non < 5 pei (n. 41 , 24 Mem.) è impossibile . Dunque sarà ancora impossibile , che nell' esponente ik abbiasi $i = 2$, e per conseguenza dovrà essere $i > 2$.

40. Poichè nella $R^{ik} + b = 0$ abbiamo $i > 2$ (n.° prec.) , come nella $Q^{gh} + b = 0$ avevamo $g > 2$ (n.° 35) , e poichè queste due Equazioni sono di forma perfettamente simile, ne segue, che col discorso medesimo , mediante il quale si è nel (n.° 36) dimostrato dovere nella $Q^{gh} + b = 0$ essere $h > 2$, si dimostrerà ancora, che nella $R^{ik} + b = 0$ si ha necessariamente $k > 2$.

41. Supposto pertanto $R^i = S$, ed ottenuta la $S^k + b = 0$, come nei (n. 37 , 39 , 40) vedremo che anche l'esponente k deve essere un composto di due fattori , ciascuno dei quali sia > 2 . Chiamati questi q, r, onde $k = qr$, e nella $S^k + b = 0$, ossia $S^{qr} + b = 0$ fatto giusta il metodo precedente $S^q = T$, nè verrà $T^r + b = 0$ Equazione, nella quale si troverà egualmente dover esser l' esponente r composto di altri due fattori , che dirò s , t , onde $r = st$, ciascheduno de' quali sarà > 2. In egual modo supposto $T^r = U$, l' Equazione $T^{rt} + b = 0$ si ridurrà alla $U^t + b = 0$, e l'esponente t sarà esso pure il prodotto di due fattori , ciascuno de' quali supera il 2 . Così proseguendo all' infinito , vedesi , che si viene a formare una serie infinita di Equazioni $Q^p + b = 0$, $R^h + b = 0$, $S^k + b = 0$, $T^r + b = 0$, $U^t + b = 0$, ec. , in cui avendosi $p = gh$, $h = ik$, $k = qr$, $r = st$, ec. , ed essendo ciascuno dei fattori g , i , q , s , ec. , h, k, r, t, ec. > 2 , la serie degli esponenti p , h, k , r, t , ec. sarà costantemente decrescente , cosicchè $p > h > k > r > t >$ ec. , e ciascheduno di essi sarà numero composto . Ora essendo p numero finito (n.° 34) , l'esistenza di questa serie infinita di esponenti è impossibile , perchè col progredire innanzi tal serie , è chiaro , che giunger si deve necessariamente ad un esponente il qual sia numero primo . Dunque sarà ancora impossibile la corrispondente sovraindicata serie d' Equa-

d' Equazioni, e quindi impossibile la $Q^p + b = 0$: ma essendo assurda questa $Q^p + b = 0$, è assurda eziandio la $(y+a)^p + b = 0$ (n. 34). Dunque allorquando la $F(y)$ sia il prodotto di quantesivogliono funzioni $f'(y), f''(y), f'''(y)$, ec., e mentre il grado di una di queste sia > 2 (n.° 34), è impossibile, che la $F(y) = 0$ sia della forma $(y + a)^p + b = 0$.

42. Se manchi la condizione, che il grado d' una delle $f'(y) = 0, f''(y) = 0, f'''(y) = 0$, ec. sia > 2; allora tutte queste Equazioni avranno il grado 1, oppure 2 (n. 34, 35), e risultando il numero $g = 1$ oppure $= 2$, non avranno più luogo i precedenti discorsi, e potrà benissimo darsi, che la $F(y) = 0$ acquisti la forma $(y+a)^p + b = 0$; ma si rifletta, che questo caso non apporta vantaggio alcuno alla soluzione della supposta (F). Se la y' può attualmente determinarsi dalla $(y + a)^p + b = 0$, poteva già anche determinarsi nel caso presente dalla $f'(y) = 0$, non superandosi da questa Equazione il grado 2°, e d' altronde questa y' non avendo per tutte le permutazioni fra le $x', x'', x''', x^{iv}, x^v$, che uno, o due soli valori, non è punto opportuna per la soluzione della Equazion generale di 5° grado (n. 4, ec. 10).

43. I discorsi de' precedenti (n. 33, ec. 42) non esigono punto che la $F(y) = 0$ sia la trasformata in $y = f(z')(z'')(z''') \ldots$ del (n.° 29.) dedotta dalla (VII): in essi la $F(y) = 0$ si considera come un' Equazione risultata dal moltiplicare fra loro quante si vogliono Equazioni $f'(y) = 0, f''(y) = 0, f'''(y) = 0$, ec. aventi per incognite delle funzioni, qualunque esse siansi, delle x', x'', ec., x^v. Dunque quanto si è concluso nei precedenti (n. 41, 42) è sempre vero, qualunque siano le Equazioni $f'(y) = 0, f''(y) = 0, f'''(y) = 0$, ec. componenti la $F(y) = 0$.

44. Vogliasi, che una per lo meno delle $f'(y) = 0, f''(y) = 0, f'''(y) = 0$, ec. per esempio la $f'(y) = 0$ contenga non già tutti, siccome ne' (n. prec.^{i}), i valori diversi, che per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v derivano dalla $y' = \Phi'(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^v)$ (n.° 28), ma solamente, e precisamente quella metà de' medesimi, che corrisponde al primo de' due valori $\Phi'(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^v)$, $\Phi'(x')(x')(x''')(x^{iv})(x^v)$ supposti nel

(2° n. 39) rispettivamente = R'1 , R'2 . Potrà essa in questa ipotesi la precedente $F(y) = 0$ acquistare la forma $(y+a)^p + b = 0$?

Rispondo, che se il grado della $f'(y) = 0$, e però il numero dei valori della y ora supposti sia > 1, ciò non è punto possibile. Chiamato difatti g questo numero, e ritenuta la supposizione di $y + a = Q$ (n.° 34), onde le precedenti Equazioni in y riducansi, come nel citato (n.° 34.), ad essere espresse per la Q, con dei discorsi perfettamente uguali a quelli de' (n. 34, 35) si vedrà, che ancora nel caso presente le Q'', Q''', ec. conservano, e cambiano il proprio valore per quelle stesse permutazioni, per cui lo conserva, e cambia la Q', e che per conseguenza il grado di ciascuna delle $f'(Q-a) = 0$, $f''(Q-a) = 0$, $f'''(Q-a) = 0$, ec. è $= g$, e ciascuna di esse contiene per radici solamente quei risultati delle rispettive funzioni Q', Q'', Q''', ec., che corrispondono al primo valore $\Phi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$. Ora chiamati, come nel (2° n.° 36) Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(g) le radici della $f'(Q-a)=0$, ciascuno dei coefficienti di questa Equazione essendo una funzione della forma funz.^{r} (Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(g)) (n. 105, 3. Teor.), conserva il proprio valore, tanto per quelle permutazioni fra le x', x'', ec. x^v, sotto cui conservano il proprio le Q'1, Q'2, Q'3 ec., Q'(g), come per quelle altre, sotto cui esse Q'1, Q'2, Q'3, ec. Q'(g) cangiansi fra di loro, e lo stesso dicesi pur anche dei coefficienti di tutte le altre Equazioni $f''(Q-a) = 0$, $f'''(Q-a) = 0$ ec. Dunque ciascuno di tali coefficienti, e però anche il coefficiente b nella $Q^p + b = 0$, non cambierà punto valore per tutte queste permutazioni, per cui non lo cambia la $\Phi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, ed avrà per conseguenza corrispondentemente a questa funzione un solo valore; e potendone aver un altro corrispondentemente alla $\Phi'(x')(x')(x''')(x'^v)(x^v)$, il primo di questi sarà quello, che è contenuto nella precedente $Q^p + b = 0$.

Ciò posto, e chiamato h il numero delle Q', Q'', Q''', ec. sarà, come nel (n.° 35), $p = gh$, e ridottasi la $Q^p + b = 0$ alla $Q^{gh} + b = 0$, io dico primieramente, che deve essere $h > 1$; perchè se fosse $h = 1$ la $Q^p + b = 0$ diverrebbe $Q^g + b = 0$, e

que-

questa è un'Equazione, la quale per essere $g > 1$, e quindi pei (n. 41, 24. Mem.) con un discorso perfettamente simile a quello del (1° n.° 36) si trova impossibile.

Facciasi $Q^g = R$, onde si abbia $R^h + b = 0$. Essendo $h > 1$, con un discorso uguale a quello del (n.° 37) vedremo, che in conseguenza dei (n. 41, 24 Mem.) la $R^h + b = 0$ non può avere per radici i soli risultati, che da una sola funzione R provengono per tutte le permutazioni fra le x', x'', x''' ec. x^v corrispondenti alla $\Phi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, e che deve avere per radici i risultati differenti, che per le permutazioni medesime nascono da più funzioni diverse R', R'', R''' ec. Chiamato adunque k il numero di tutte queste R', R'', R''' ec., ed i il numero dei risultati diversi, che corrispondentemente alla $\Phi'(x)(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ ottengonsi da una di tali funzioni, sarà quì pure, come nel citato (n.° 37.), $h = ik$, e la $R^h + b = 0$ si ridurrà alla $R^{ik} + b = 0$.

In questa $R^{ik} + b = 0$ deve essere $i > 1$: perchè se fosse $i = 1$, la R avendo allora per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v un solo valore corrispondente alla $\Phi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$; l'Equazione $Q^g = R'$, come nel (1° n.° 39) pel (n.° 38), e pei (n. 41, 24 Mem.) si troverebbe assurda.

Come si è presentemente trovato, che nella $Q^{gh} + b = 0$, a cagione di $g > 1$, deve essere ancora $h > 1$: così nella $R^{ik} + b = 0$ vedesi, che essendo $i > 1$, deve eziandio risultare $k > 1$.

Facciasi $R^i = S$, e dalla $R^{ik} + b = 0$ ottenuta la $S^k + b = 0$, si applichi a questa, ed all'esponente k quanto si è detto rapporto alla $R^h + b = 0$, ed all'esponente h; vedremo quindi dover essere anche k un numero composto di altri due, che, come nel (n.° 41), dirò q, r, e dover essere $q > 1$, $r > 1$. Col supporre $S^t = T$ ridotta la $S^k + b = 0$ alla $T^r + b = 0$, si troverà parimenti dover essere r uguale ad un prodotto st, in cui $s > 1$, $t > 1$; e così in progresso. Dunque eziandio nel caso presente nascerà una serie di Equazioni $Q^t + b = 0$, $R^h + b = 0$, $S^k + b = 0$, $T^r + b = 0$,

$b = 0$, ec., la quale, essendo $p = gh$, $h = ik$, $k = qr$, ec., ed essendo tutti i numeri g, i, q ec. h, k, r, ec. > 1, potrà protraersi all'infinito, ed in cui gli esponenti p, h, k, r, ec. anderan sempre decrescendo, e dovrann' essere tanti numeri composti; ma essendo p numero finito, una tal serie di Equazioni, come abbiamo osservato nel (n.° 41.), è impossibile. Dunque sarà impossibile ancora nella ipotesi del (n.° pres.), che la $F(y) = 0$ acquisti la forma $(y + a)^p + b = 0$; mentre però si abbia $g > 1$.

Se sia $g = 1$, allora potrà succedere, che la precedente $F(y) = 0$ acquisti la forma $(y + a)^p + b = 0$; ma le ragioni stesse, che abbiamo esposte nel (n.° 42.), ci mostrano, che una tal forma nel caso di $g = 1$ è affatto inutile per la risoluzione della (F).

45. Questa Equazione $F(y) = 0$ se deve esser priva della forma $(y + a)^p + b = 0$ (n.° 44); non potrebbe poi avere un qualche fattore, i coefficienti del quale siano funzioni razionali de' coefficienti proprj o dei coefficienti della data o della precedente funzione $\Phi'(x')(x'')(x''')(x^v)(x^v)$, e dal quale possa in seguito ricavarsi un valore della y atto immediatamente, o mediatamente allo scioglimento della (F)? Rispondo, che nò. Difatti la $F(y) = 0$, si truova con i discorsi stessi (de' n. 29, ec. 32) non avere altri fattori, i coefficienti de' quali siano funzioni razionali de' coefficienti proprj, o di quelli della (F), o della $\varphi'(x')(x'')(x''')(x^v)(x^v)$, se non che i primi membri delle Equazioni $f'(y) = 0, f''(y) = 0 f'''(y) = 0$, ec., dalle quali è composta: ma le radici di queste $f'(y) = 0$, $f''(y) = 0$, $f'''(y) = 0$, ec. tanto dalla Teoria delle Equazioni, quanto dalla Memoria sopra la Insolubilità, e dai precedenti (n. 5, ec. 10, 44, 45) ec. sappiamo essere o indeterminabili, o inutili alla soluzione della (F). Dunque ec.

46. Da quanto viene concluso; e asserito nei (n. 41, 42, 43) vedesi che resta pienamente sciolta la difficoltà che ci siamo proposta nel (n.° 30), e ciò qualunque siansi le trasformate $f'(y) = 0$, $f''(y) = 0 f'''(y) = 0$, ec. (n.° 43), dalla cui moltiplicazione risulta la $F(y) = 0$; anzi dal (n.° 44) si vede, che la difficoltà medesima rimane sciolta eziandio nel caso, in cui si voglia, che la $F(y) = 0$ contenga per fattori quelle parti delle trasformate, che corris-

pon-

pondono alla $\Phi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, parti, le quali pei (n. 280, 150, 147 Teor. n. 37, 41 Mem.) sono sempre determinabili. Dal (n.° 45) poi apparisce, che neppure in quest' ultima supposizione dalla $F(y)=0$ possono aversi dei fattori opportuni, onde scuoprire nella (F) immediatamente, o mediatamente i valori della x.

47. Nel (n.° 241 Teor.), e nel (3.° Intr. della Mem.) ho detto, che la funzione fra le $x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}$, la quale è radice di una di quelle trasformate, che deggiono immediatamente, o mediatamente servire alla soluzione della (F), può sempre supporsi razionale; perchè se si supponesse irrazionale, 1.° la trasformata corrispondente per questa irrazionalità s' innalzerebbe maggiormente di grado (n.i 241, 136 Mem.), e quindi si renderebbe più difficile a risolversi; 2.° dallo stato d' irrazionalità della supposta funzione pel (n.° 158 Teor.) non si trae vantaggio alcuno sopra di una funzione simile razionale, mentre da tal funzione vogliansi determinare i valori della x nella (F), o quelli di un' altra funzione delle $x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}$. Supposte le due $y'=\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, $z'=f'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ funzioni simili (n.° 4 Teor.), tali cioè, che per quelle permutazioni medesime fra le $x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}$, per cui la y' conserva o cangia il proprio valore, lo conservi ancora, o cambi in corrispondenza la z', e supposta la y' irrazionale, e razionale la z', la trasformata primieramente in y sarà di un grado più alto di quello della trasformata in z, e secondariamente nel cercare dalla z' il valore della x, o quello di una terza funzione $u=F'(x)$, se cadiamo in un' Equazione di grado per esempio q, si caderà eziandio in un' Equazione dello stesso grado q, mentre questo valor della x, o questa funzione u si ricerchi dalla y'. Egli è perciò, che tanto nella Teoria, come nella Memoria non si sono, rapporto alla soluzione delle Equazioni, considerate punto le trasformate, che hanno per radici delle funzioni delle x', x'' ec. x^{v} irrazionali: ma quantunque il grado dell'Equazione in $y=\varphi(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, essendo questa funzione irrazionale, sia troppo alto, non potrebbe tale equazione acquistare la solita forma $(y+a)^{p}+b=0$,

od

od avere un fattore determinabile, da cui possa ricavarsi un valore della y opportuno immediatamente, o mediatamente allo scioglimento della (F) ? Quantunque, nel cercare dalla y' il valore di una funzione u, cadasi in un' Equazione di grado q troppo alto, non potrebbe darsi, che anche in questa Equazione in u fosse determinabile un fattore atto alla soluzione della (F), o che fosse essa riducibile alla forma $(u+a)^q + b = 0$? Ecco altri due dubbj, cui è necessario risolvere.

48. Supposta pertanto la $y = \varphi(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ irrazionale, dal (n.° 135 Teor.) sappiamo, che la varietà de' suoi valori dipende da due ragioni, dalle permutazioni cioè, che possonsi fare tra le x', x'', ec. x^v, e dalla irrazionalità della funzione. Teniamo conto in primo luogo dei valori diversi, che dipendono da quest' ultima ragione, e chiamati $y' = \varphi(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $y'' = \varphi''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $y''' = \varphi'''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, ec. i risultati, che ottengonsi dalla $y = \varphi'''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ corrispondentemente ai diversi valori, e alle combinazioni diverse dei radicali, che vi si contengono, eseguiscasi in seguito in ciascuna delle y', y'' y''', ec. tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v. Operando in simile guisa, otterremo evidentemente tutti i diversi valori della supposta y, e quindi dal loro numero il grado dell' Equazione corrispondente.

Sia $f'(y) = 0$ l' Equazione, che contiene tutti i valori diversi, che ottengonsi dalla $y' = \varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v, sia $f''(y) = 0$ l'Equazione, in cui si comprendono i valori tutti, che nel modo medesimo provengono dalla $y'' = \varphi''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, contengansi dalla $f'''(y) = 0$ i valori provenienti nella stessa guisa dalla $y''' = \varphi'''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, e così in progresso, e sia finalmente $F(y) = 0$ l' Equazione, che tutti insieme riunisce i valori della y. Questa $F(y) = 0$ equivalerà evidentemente al prodotto di tutte le $f'(y) = 0$, $f''(y) = 0$, $f'''(y) = 0$, ec.

49. È facile a vedersi, che i discorsi tutti, e però tutti i Teoremi, che sonosi esposti tanto nel Capo 13° della Teoria, come nella Memoria rapporto ai risultati provenienti da una data fun-

funzion razionale per tutte le permutazioni fra le x', x'', x''', ec., si verificano eziandio, allorchè la funzione data sia irrazionale, purchè in quest' ultima ipotesi si conservi nella data funzione costante il valore, e la combinazione dei radicali, che vi si contengono. Dunque neppure tra le Equazioni $f'(y)=0$, $f''(y)=0$, $f'''(y)=0$, ec. del (n.° prec.) alcuna ve ne potrà essere, la quale, mentre abbia l' esponente >2, possa acquistare la forma $(y+a)^p+b=0$ (n.i 22, 21, 24 Mem.), o la quale contenga alcun fattore, i cui coefficenti siano funzioni razionali de' coefficenti proprj, o dei coefficenti della data (n.° 28 Mem., prec. n.° 27).

Ora queste $f'(y)$, $f''(y)$, $f'''(y)$, ec. sono evidentemente tante funzioni, l' una delle quali non proviene dall' altra per delle permutazioni fra le x', x'', ec. x^v. Dunque i raziocinii de' (n.i 29, ec. 43), a cagione di quanto abbiam detto poc' anzi, applicansi tutti eziandio alla $F(y)=0$ del (n.° prec.), giacchè questa $F(y)=0$ proviene essa pure, siccome l' altra dei (n.i 29, 43) dal prodotto delle indicate $f'(y)=0$, $f''(y)=0$, $f'''(y)=0$, ec., e per conseguenza neppure essa $F(y)=0$ potrà acquistare la forma $(y+a)^p+b=0$, nè potrà avere alcun fattore diverso dai $f'(y)$, $f''(y)$, $f'''(y)$, ec. i coefficenti del quale siano funzioni razionali dei coefficenti della proposta, o de' coefficenti proprj.

5o. Rapporto ora alla seconda delle difficoltà proposte nel (n.° 47), osservo, che volendo attualmente da un valore della y' determinare il valore di una funzione u, razionale essa siasi, o irrazionale, conviene ritrovare primieramente questo valor della y'; ma simil valore non è mai determinabile, se non quando la corrispondente $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ abbia per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v uno, o due soli valori (n.° 14 Mem., n.° 276 Teor., prec. n.° 5). Supposto adunque, che la y' abbia dipendentemente dalle permutazioni questo solo, o questi due soli valori, poichè esso nel primo caso è della forma $\varphi'(x',x'',x''',x'^v,x^v)$, e nel caso secondo i due valori fra loro diversi della y' sono i due risultati $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $\varphi'(x'')(x')(x''')(x'^v)(x^v)$ corrispondenti ai due del (2.° n.° 39, n.° 280 Teor., n.i 40, 10 Mem.), poi-

chè i coefficenti della richiesta Equazione in u deggiono determinarsi dipendentemente da uno dei valori della y', e poichè finalmente rapporto eziandio alla u irrazionale hanno luogo le riflessioni fatte nei (n.^{i} 48, 49); ne segue, che saranno qui pure applicabili i raziocinii dei (n.^{i} 21, 22, 24, 41 Mem., prec.^{i} n.^{i} 32, ec. 43, 44, 45, 46, 49), e però che l' Equazione in u nè può avere alcun divisore, i coefficenti del quale siano funzioni commensurabili de' coefficenti proprj, o dei coefficenti della data, o funzioni razionali del rispettivo valore della y' (n.° 45), nè può acquistare la forma $(u+a)^{r}+b=0$, mentre nel primo degli accennati casi abbiasi $q>2$, e nel secondo $q>1$. La supposizione di $q=2$ nel primo caso, e quella di $q=1$ nel caso secondo sappiamo essere inutili allo scioglimento della (F) (n.^{i} 42, 44).

La soluzione dei dubbj proposti nel (n.° 47) ottienesi adunque nella guisa medesima, con cui nei (n.^{i} prec.) sonosi sciolte le difficoltà esposte nei (n.^{i} 24, 33, 44).

51. Tanto nella Teoria, come nella Memoria ho considerato, che i valori della x nella (F) si ricerchino immediatamente dai valori di una sola funzione Z (n.^{i} 280, 282 Teor.), oppure z (n.° 30 Mem.); ma se in tale ipotesi questi valori della x non sono determinabili, come si è già dimostrato, non potrebbero poi esserlo, mentre si cerchino dipendentemente da due, o più funzioni combinate fra di loro in un qualche determinato modo, qualunque esso siasi?

Per rispondere a simile dubbio, posto $\varphi(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})=z$, $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})=u$, $\varphi''(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})=y$, ec., supponghiamo di cercare la x dalle quantità z, u, y, ec., e di ottenere quindi la Equazione $f(x)(z)(u)(y)\ldots=0$. Ora, o si vuole, che ciascuna delle z, u, y, ec. conservi il proprio valore per tutte le permutazioni semplici di 1° genere (n.^{i} 256, 257 Teor., 6.° Intr. Mem.), che possonsi eseguire fra tutte e cinque le $x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}$; o si vuole, che qualcuna delle stesse funzioni, per esempio la u, cambi di valore per una delle permutazioni indicate. Nel secondo di questi casi la u avendo un numero di valori tra loro diversi non <5 (n.° 262 Teor., n.° 4 Mem.), dipenderà da un' Equazio-

zione di grado non minore del 5.°, della quale, come apparisce da quanto si è detto nei (n.i prec.i), non si può ottenere la soluzione. Nel caso primo poi col discorso medesimo del (n.°31 Mem.), si vede, che dai valori delle z,u,y, ec. combinate, comunque vogliasi, fra di loro tutte dipendono in egual modo le x',x'',x''',x^{IV},x^{V}, cerchinsi esse da tali valori ad una, ad una, oppure a due a due, oppure a tre, a tre, ec. Dunque non potendo queste radici, che essere comprese tutte, e in egual modo nella sola $f(x)(z)(u)(y)\ldots.=0$, tale Equazione sarà di quinto grado, ed anzi sarà identica con la data. Dunque per ottenere i valori della x in questo caso, converrebbe cadere a dovere infine risolvere la stessa Equazione proposta, e quindi le z, u,y, ec. diverrebbero inutili. Dunque tanto nel primo, come nel secondo degli accennati casi la moltiplicità delle funzioni insiem combinate nulla giova alla risoluzione della Equazione data di 5.° grado.

52. Quantunque non possa l' Equazione generale di 5.° grado ridursi mai ad altra Equazione, che si sappia risolvere, e dalle cui radici sappiansi poi dedurre immediatamente, o mediatamente le radici della proposta; non potrebbe egli darsi, che indipendentemente da qualunque trasformazione si potesse supporre, od immaginare, anche all' azzardo, una quantità, od espressione algebraica, la quale sostituita in luogo della x facesse verificare l' Equazione data?

Rispondo che no, e lo dimostro. Poichè l' accennata quantità, od espressione algebraica, la quale si vuole radice della data Equazione di 5.° grado, può, mentre esista, essere formata di diversi termini; chiamati questi P,Q,R, ec., supponghiamo, se è possibile, $x'=P+Q+R+$ ec. Dovendo la x', e però i termini P,Q,R, ec. essere evidentemente funzioni degli A,B,C, ec. coefficenti della data Equazione (F), in cui $m=5$,

1.° Comincio dal supporre $P=\sqrt[p]{b}$, in cui p sia numero intero, e la b sia funzione razionale degli A,B C, ec. In questa ipotesi si collochino nella b invece dei coefficenti A, B, C, ec.

i loro valori espressi per le x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}; la $\sqrt[p]{b}$ diventerà perciò una funzione delle x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}, che chiamerò $\varphi(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, onde $P=\sqrt[p]{b}=\varphi(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, e se tal funzione risulta irrazionale, potendo corrispondentemente ai diversi valori, e alle combinazioni diverse dei radicali acquistare forme diverse, esprimiamo tali forme, come nel (n.° 48) per le $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, $\varphi''(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, $\varphi'''(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, ec. In una qualsivoglia di queste funzioni, per esempio nella prima $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ eseguiscansi tutte le permutazioni fra le x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}: sotto simile operazione io dico, che la $\varphi(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ o dovrà rimanere sempre la medesima, ed avere quindi la forma $\varphi'(x',x'',x''',x'^{v},x^{v})$ (2.° n.° 3 Teor.), o dovrà acquistare due soli valori tra loro diversi, cioè i due $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, $\varphi'(x'')(x')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ corrispondenti ai due del precedente (2.° n.° 39.), e ai due y', y'' del (n.° 36. Mem.). Imperciocchè elevando la $P=\sqrt[p]{b}$ alla potenza p, abbiamo con l'incognita P un' Equazione $P^{p}=b$ la quale pei (n.i 21, 22, 24, 36 Mem., prec.i n.i 49. 50) non può aver luogo se non se negli indicati due casi. Ma ciò, che si è detto della $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, dicesi egualmente della $\varphi''(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, della $\varphi'''(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, ec. Dunque non potendo ciascuna di queste funzioni acquistare per le permutazioni tutte fra le $x'.x''$, ec. x^{v}, che uno, o due soli valori differenti tra loro, esse medesime, e però la P dovranno in questa prima ipotesi non cambiar mai di valore, qualunque permutazione semplice di 1.° genere (6.° Int. Mem.) eseguiscasi fra tutte e cinque insieme le x', x'', ec. x^{v}.

2.° Vogliasi $P=\sqrt[q]{(a+\sqrt[p]{b})}$, in cui q sia numero intero, la $\sqrt[p]{b}$ sia quale l'abbiamo supposta nel (prec 1°), e la a sia una funzione razionale dei coefficenti A, B, C ec. della (F). Sostituiti quì pure invece degli A, B, C, ec. i loro valori espressi

per

per le x', x'', ec. x^v, la a diverrà evidentemente una funzione della forma funz. $(x', x'', x''', x'^v, x^v)$, conservandosi sempre la medesima sotto tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v. Fatta poi la stessa sostituzione nella $\sqrt[p]{b}$, se questa diviene una funzione irrazionale delle x', x'', ec. x^v, prendo uno de' suoi valori $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $\varphi''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $\varphi'''(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, ec. supposti nel (prec. 1°) per esempio il primo, e avremo $a + \sqrt[p]{b}$ = funzione $(x', x'', x''', x'^v, x^v) + \varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$; ma per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v la $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ non può acquistare, che uno, o due soli valori differenti tra loro, quelli cioè, che abbiamo accennati nel (prec. 1°). Dunque per le permutazioni medesime dovrà in corrispondenza acquistare uno, o due soli valori tra loro diversi eziandio la funz. $(x', x'', x''', x'^v, x^v) + \varphi' x')(x')(x''')(x'^v)(x^v)$. Pongasi la somma di queste due funzioni, ossia il corrispondente valore della quantità $a + \sqrt[p]{b} = c$, chiaminsi c', c'' i due valori della c, allorquando la $\sqrt[p]{b}$ ha i due $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, $\varphi'(x'')(x')(x''')(x'^v)(x^v)$ (prec. 1°), e sia $\sqrt[q]{(a+\sqrt[p]{b})} = \sqrt[q]{c}$ $= \sqrt[q]{(\text{funz. } (x', x'', x''', x'^v, x^v) + \varphi'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v),)} =$ $F(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$. Potendo di nuovo la $F(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ risultare dipendentemente dalla $\sqrt[q]{}$ una funzione irrazionale; denotati quì pure, mentre ciò succeda, siccome nel (prec. 1°), con tanti apici sovraposti alla F i valori diversi, che per tale irrazionalità provengono dalla $F(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$, prendiamo uno qualunque di essi, per esempio il valore $F'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$. Ora anche in questa funzione $F'(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v)$ io dico, che tutte le permutazioni fra le x', x'', ec x^v non possono mai produrre, che uno, o due soli valori differenti tra loro. Imperciocchè

chè mentre si ha $\sqrt[p]{b} = \Phi'(x', x'', x''', x'^{v} x^{v})$, risultando $c =$ funz. $(x', x'' x''', x'^{v}, x^{v}) + \Phi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, questa c conserverà sempre il proprio valore qualunque permutazione si faccia tra le x', x'', ec. x^{v}; e per conseguenza quello stesso, che nel (prec. 1°) si è detto, e si è concluso della $\sqrt[p]{b}$, dicesi quì pure, e si conclude della $\sqrt[q]{c}$.

Quando poi la $\sqrt[p]{b}$ ha i due valori $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, $\varphi'(x'')(x')(x''')(x'^{v})(x^{v})$; supposto allora $\sqrt[q]{c} = z$, e formata l'Equazione $z^{q} = c$, i valori della $F'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ corrispondenti alla $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, e però alla c' esisteranno nella $z^{q} = c'$, e gli altri corrispondenti alla $\varphi'(x'')(x')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, e però alla c'' si conteranno nella $z^{q} = c''$ (n.° 38); ma egli è impossibile, che in un' Equazione della forma $z^{q} = c'$ una qualunque delle sue radici, e però la $F'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ abbia per le permutazioni tutte fra le x', x'', x''', ec. x^{v} più di un valore (n. 41, 24 Mem., prec. n. 49, 50). Dunque avendo la $F'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ corrispondentemente alla $\varphi'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ un solo valore, ed un solo corrispondentemente alla $\varphi'(x'')(x')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, essa per tutte le permutazioni, non potrà mai acquistare, che uno, o due soli valori differenti, e quando questo è uno, tal valore sarà $F'(x', x'', x''', x'^{v}, x^{v})$, quando son due, tali saranno $F'(x')(x'')(x''')(x'^{v}), (x^{v})$, $F'(x'')(x')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ corrispondenti ai soliti due y', y'' del (n.° 36. Mem.), ed ai due del (2° prec. n.° 39). Dunque, ciocchè si è detto della $F'(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ dicendosi in egual modo di ciascheduna delle $F''(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, $F'''(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, ec. ne segue che ancora quando si abbia $P = \sqrt[q]{(a + \sqrt[p]{b})}$, essa P ridotta a forma di funzione delle x', x'', ec. x^{v} conserverà sempre il proprio valore, qualunque permutazione semplice di 1° genere facciasi fra tutte e cinque le x' x'', ec. x^{v}.

3° Suppongansi quante, e quali si vogliono funzioni razionali dei

dei coefficienti A, B, C, ec , che denomino a, $a1$, $a2$, ec. , b $b1$, $b2$, ec., e supposto, che c ci rappresenti una funzione razionale quale si voglia delle $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[p1]{b1}$, $\sqrt[p2]{b2}$, ec. a, $a1$, $a2$, ec., essendo p, $p1$, $p2$, ec. tanti numeri interi, abbiasi $P = \sqrt[q]{c}$, essendo anche q numero intero. Col discorso istesso del (prec. 1°) si truova, che ciascuna di queste $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[p1]{b1}$, $\sqrt[p2]{b2}$, ec. è funzione delle x', x'', ec. x^v, quale ne è la $\sqrt[p]{b}$ colà supposta. Dunque, rinovato il raziocinio del (prec. 2°), troveremo, che quì pure la $P = \sqrt[q]{c}$ ridotta a forma di funzione delle x', x'', ec x^v è tale, che ciascuno de'suoi valori dipendenti dalla irrazionalità (se mai risulta irrazionale) deve, siccome la $F'(x')(x'')(x''')x'^v)(x^v)$ del (prec. 3°), acquistare sotto tutte le permutazioni uno , o due soli valori differenti fra loro, e per conseguenza che ancora in questo caso la $P = \sqrt[q]{c}$ deve, qualunque permutazione semplice di 1° genere facciasi fra tutte le x', x'', ec., x^v conservarsi sempre la medesima .

Se nel (precedente 1°) si voglia la $\Phi(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v) = \sqrt[p]{b}$ razionale , e così se razionale si voglia nel (prec. 2°) la $F(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v) = \sqrt[q]{(a + \sqrt[p]{b})}$, e razionale la funzione delle x', x'', ec. x^v, a cui si uguagl'a la $\sqrt[q]{c}$ del (prec. 3°); vedesi agevolmente, che i discorsi fatti sin' ora hanno sempre luogo egualmente , ed anzi , che riescendo essi più semplici, con facil tà maggiore si giunge sempre alle medesime conclusioni.

4° Oltre la c del (prec. 3) si formino quante altre funzioni si vogliono razionali di alcune , o di tutte le precedenti quantità a, $a1$, $a2$, ec., $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[p1]{b1}$, $\sqrt[p2]{b2}$, ec., e denominate queste

$c1$, $c2$, ec., e ritenuti sempre interi gl' indici de' radicali, si esprima con la lettera d una qualunque funzione razionale delle $a, a1, a2$, ec. $\sqrt[p]{b}, \sqrt[p1]{b1}, \sqrt[p2]{b2}$, ec. $\sqrt[q]{c}, \sqrt[q1]{c1}, \sqrt[q2]{c2}$, ec. e sia $P = \sqrt[r]{d}$. Sostituiti in luogo di tutte le quantità, che formano la d i rispettivi valori espressi per le x', x'', ec. x^v, poichè ciascheduna delle funzioni, che quindi risultano, non può per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v acquistare che uno, o due soli valori tra loro diversi (prec. 1°, 2°, 3°), tale sarà ancora la funzione, a cui corrispondentemente diviene uguale la d, e tale per conseguenza col discorso istesso del (prec. 2°) si troverà essere la funzione, razionale essa siasi, o irrazionale, a cui si ugnaglia la $\sqrt[r]{d}$. Dunque eziandio nella ipotesi presente, qualunque permutazione semplice di genere 1° si instituisca fra tutte insieme le x', x'', ec. x^v, la $P = \sqrt[r]{d}$ non cangerà mai di valore.

5° Se nel modo, con cui nel (prec. 4°) si è formata la d, facciansi quante altre funzioni si vogliono, che dirò $d1, d2$, ec., se con la lettera e si rappresenti una funzione, qualunque siasi, razionale delle $a, a1, a2$, ec., $\sqrt[p]{b}, \sqrt[p1]{b1}, \sqrt[p2]{b2}$, ec., $\sqrt[q]{c}$, $\sqrt[q1]{c1}, \sqrt[q2]{c2}$, ec. $\sqrt[r]{d}, \sqrt[r1]{d1}, \sqrt[r2]{d2}$, ec., e se si voglia $P = \sqrt[s]{e}$; con de' raziocinii eguali a quelli de' (prec. 1° ec. 4°) troveremo, che eziandio questa $P = \sqrt[s]{e}$ è una funzione delle x', x'', ec. x^v, la quale sotto tutte le permutazioni semplici di 1° genere fra tutte e cinque le indicate radici, conservasi sempre del valore medesimo.

Lo stesso vedesi facilmente, che deve accadere, anche allorquando vogliasi $P = \sqrt[t]{g}$, essendo g una funzione qualunque ra-

razionale delle a, $a1$, $a2$, ec., $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[p1]{b1}$, $\sqrt[p2]{b2}$. ec. $\sqrt[q]{c}$, $\sqrt[q1]{c1}$, $\sqrt[q2]{c2}$, ec. $\sqrt[r]{d}$, $\sqrt[r1]{d1}$, $\sqrt[r2]{d2}$, ec. $\sqrt[s]{e}$, $\sqrt[s1]{e1}$, $\sqrt[s2]{e2}$, ec.; e così in progresso.

Ora con la lettera P viene rappresentato per ipotesi un solo termine funzione algebraica de' coefficienti A, B, C, ec., e così con ciascheduna delle altre Q, R, ec. Dunque questo termine P, e quindi ciascheduno degli altri Q, R, ec., dovendo, qualunque esso siasi, uguagliarsi sempre ad una delle quantità supposte ne' (prec. 1° ec. 5°), ad una cioè delle quantità, che sonosi espresse con le a, $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[q]{c}$, $\sqrt[r]{d}$, $\sqrt[s]{e}$, $\sqrt[t]{g}$, ec., ne segue, che ciascuno de'medesimi P, Q, R, ec. sarà sempre tale, che, collocati in luogo de'coefficienti A, B, C, ec. i loro valori espressi per le x', x'', ec. x^v, diverrà sempre una funzione, la quale, qualunque permutazione semplice di genere 1° si eseguisca fra tutte queste x', x'', ec. x^v, non cambierà mai di valore.

Ciò posto, ed eseguite attualmente invece de' coefficienti A, B, C, ec. le sostituzioni ora indicate suppongasi, che risulti $P = \Phi 1\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)$, $Q = \Phi 2\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)$, $R = \Phi 3\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)$, ec.; l'Equazione $x' = P + Q + R +$ ec. supposta a principio del presente numero diventerà perciò $x' = \Phi 1\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) + \Phi 2\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) + \Phi 3\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) +$ ec., e però a cagione di $x' = x' + o\,(x'' + x''' + x'^v + x^v)$ avremo $x' + o\,(x'' + x''' + x'^v + x^v) = \Phi 1\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) + \Phi 2\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) + \Phi 3\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) +$ ec. Ora in quest'ultima Equazione, la quale per la generalità della (F) deve essere necessariamente identica, eseguiscasi una delle permutazioni semplici di 1° genere fra tutte le x', x'', ec. x^v, quella per esempio per cui la x' si cambia nella x'', la x'' nella x''', la x''' nella x'^v, la x'^v nella x^v, e

la x^v nella x', e si replichi tale permutazione finchè si può. Sotto questa operazione, dovendo per l'accennata identicità conservarsi sempre l'uguaglianza, avremo

$x' + o(x'' + x''' + x'^v + x^v) = \Phi 1\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) +$
$\Phi 2\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) + \Phi 3\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v) +$ ec.

$x'' + o(x''' + x'^v + x^v + x') = \Phi 1\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)\,(x') +$
$\Phi 2\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)\,(x') + \Phi 3\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)\,(x') +$ ec.

$x''' + o(x'^v + x^v + x' + x'') = \Phi 1\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)\,(x')\,(x'') +$
$\Phi 2\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)\,(x')\,(x'') + \Phi 3\,(x''')\,(x'^v)\,(x^v)\,(x')\,(x'') +$ ec.

$x'^v + o(x^v + x' + x'' + x''') = \Phi 1\,(x'^v)\,(x^v)\,(x')\,(x'')\,(x''') +$
$\Phi 2\,(x'^v)\,(x^v)\,(x')\,(x'')\,(x''') + \Phi 3\,(x'^v)\,(x^v)\,(x')\,(x'')\,(x''') +$ ec.

$x^v + o(x' + x'' + x''' + x'^v) = \Phi 1\,(x^v)\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v) +$
$\Phi 2\,(x^v)\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v) + \Phi 3\,(x^v)\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v) +$ ec.;

ma, per quanto si è dimostrato ne' (prec. 1° ec. 5°), abbiamo ancora

$\Phi 1(x')(x'')(x''')(x'^v)(x^v) = \Phi 1(x'')(x''')(x'^v)(x^v)(x') = \Phi 1(x''')(x'^v)(x^v)(x')(x'')$
$= \Phi 1\,(x'^v)\,(x^v)\,(x')\,(x'')\,(x''') = \Phi 1\,(x^v)\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^v)$, e parimenti sono uguali fra loro i cinque risultati, che abbiam denotati con la $\Phi 2$, i cinque denotati con la $\Phi 3$, e così di seguito. Dunque nelle precedenti cinque Equazioni risultando i secondi membri, tutti uguali fra loro, tali dovranno essere fra loro anche i primi, e per conseguenza avremo $x' = x'' = x''' = x'^v = x^v$; ma egli è un assurdo, che le cinque radici di un' Equazione generica di 5° grado, siano uguali fra loro: dunque sarà assurda ancora la supposta Equazione $x' = P + Q + R +$ ec.; e sarà per conseguenza impossibile, che possa mai truovarsi, anche all' azzardo, una quantità, od espressione algebraica, la qual sia radice di un' Equazione di 5° grado generale.

53. Quanto abbiam dimostrato, e concluso nel precedente (n.° 52.) vedesi, che non solo scioglie la obbiezione ivi fatta, ma inoltre serve a pruovare l' Insolubilità della Equazione generale di grado 5°, introducendo, come si è avvertito nel (n.° 23), la considerazione dei radicali, che dovrebbero contenersi nel valore della x', e finalmente costituisce un discorso, per cui si dimostra la Insolubilità medesima indipendentemente dalla consi-

de-

derazione delle trasformate, o risolventi successive, e dei loro fattori.

Se vogliansi proporre dei dubbj simili ai precedenti rapporto alla Insolubilità algebraica delle Equazioni generali di grado superiore al 5°; si potranno essi in conseguenza de' (n.° 28. Mem., prec. n.° 27, n. 64, 65, 66. Mem.) risolvere con i raziocinii medesimi de' (n.^{i} prec.^{i}).

TEORIA E CALCOLO DI $\int \frac{dz}{\log.z}$

Di Tommaso Valperga - Caluso

Ricevuti il dì 28 Giugno 1805.

Il fu nostro Socio Lorenzo Mascheroni, le cui lodi si possono leggere nel Volume precedente di questa nostra Società, si è particolarmente segnalato nelle sue sottili, e difficili ricerche relative a $\int \frac{dz}{\log.z}$, ed al Capo IV, Sezione I, Vol. I del Calcolo Integrale di Eulero. Ma neppur egli vi ha scorto ciò che (assai meno difficile) a me pare più soddisfacente. Pertanto ad esporlo sia HFACQ la curva, le cui ascisse ($x = OP$) sono i logaritmi naturali delle ordinate ($z = PQ$) ed $OA = 1$.

Avendo $z = e^x$, $dz = e^x\,dx = z\,dx$, fatto $y = \int \frac{dz}{\log.z}$, ho $dy = \frac{z\,dx}{x}$, e $dx : dy :: x : z$. Ma in ogni curva è la sottangente $s = \frac{y\,dx}{dy}$. Dunque $dx : dy :: s : y :: x : z$ sarà una proprietà della curva, la cui equazione differenziale è $dy = \frac{dz}{\log.z}$; e la tangente a qualunque suo punto sarà parallela alla retta condotta da O, origine delle x, al punto, dove la logaritmica taglia l' ordinata.

Ora poniamo che dal lato OL dei logaritmi negativi comincino y, e dx insieme con $z = 0$ quando $x = -\infty$. Avremo a concepire dx, e dz positivi, mentre nasce z positivo, e scema x negativo, e perciò $dy = \frac{z\,dx}{x}$, ed y hanno a venir negativi finchè le fluenti pervengano a $x = 0$, $z = OA$. Quindi tagliando $x = OE$, cadrà $EG = y$ dal lato opposto ad $EF = z$, e sarà la tangente SG parallela ad OF.

Ed è chiaro che quanto più E si piglia lontano da O, tanto più scema l' angolo FOE senza che OF cada su OL finchè non si con-

concepisca $z = 0$, $x = -\infty$. Dunque la stessa retta LO sarà il limite altresì, a cui si accosta all' infinito la posizione della tangente SG, la quale fatto $z=0$ dovrà coincidere con LO, che perciò avendosi a riputare tangente alla curva GK quando $x = -\infty$, ne sarà un assintoto.

Vero è che l'equazione esige solo che sia allora la tangente parallela ad OL; ma la distanza fra le due sarebbe una costante K, che conviene annullare ponendo l' asse della logaritmica sull'assintoto di GK per avere le semplici fluenti y, e non $y' = y + K$.

Essendo $dy = \frac{dz}{x}$, se consideriamo la grandezza assoluta, e perciò prescindiamo dai segni $\pm$, è chiaro che quanto x è più grande dell' unità, tanto dz è maggiore di dy. Sicchè venendo da L verso O, supposta LO incomparabilmente maggiore dell' unità, verranno a crescere simultaneamente z ed y, ma y con incrementi a principio incomparabilmente minori, i quali però meno piccioli relativamente a misura che scema x, giungono all' egualità coll' incremento di z quando $OE = 1 = OA$. Dunque fino a questo punto la somma degl' incrementi di y dovrà essere minore della somma degl' incrementi di z, $y < z$. E si trova che ivi $z = 0$, 36787 94412, $y = -0$, 21938 39344, benchè questo quì da me non si cerca. Ma dal punto, in cui $OE = OA$ cominciando gl' incrementi di y, a misura che si viene verso O, a vie più sempre esser maggiori di quelli di z, verrà la grandezza di y ad uguagliare quella di z, e quindi oltrapassarla con incrementi ognora più grandi, finchè al momento, in cui si concepisce FO ed FE, svanendo EO, andare a cadere sopra OA, si avrà a concepire EG $= -\infty$ insieme colla sua tangente SG cadere su ON, che perciò sarà un secondo assintoto di KGI.

Collo stesso ragionamento passando alla curva DBR delle y corrispondenti a x positivo, poichè similmente vi debbe essere $s : y :: x : z$, dovrà la tangente a essa curva quando $x = 0$ cader egualmente su ON, che sarà assintoto anche a BD. E al primo nascere di x positivo, quando $z = 1$, $y = -\infty$, $dy = \left(\frac{dz}{x} = \frac{zdx}{x}\right)$

=

$= \frac{dx}{o}$, verrà y scemando la sua grandezza assoluta infinita da principio rapidissimamente, ma di mano in mano con decrementi sempre meno veloci, maggiori però degl' incrementi di z finchè sia $x = OB = 1$, $z = BC = e$, nel qual punto sarà $dy = edx$, e però, supposta dx costante, $ddy = o$; onde sarà B un punto d'inflessione della curva, concava verso OA nel suo ramo superiore BR, e convessa nell'inferiore BD.

Una retta, che si menasse di O in C, essendo tangente alla logaritmica, l'angolo, ch' essa fa con OA (di 20° 11' 31'', 11) è il massimo di tutti gli angoli AOq fatti dalle rette tirate da O ad alcun punto della logaritmica. Ora a queste rette debbono essere parallele le tangenti a DBR. Dunque la tangente in B, parallela alla tangente in C, farà il massimo degli angoli delle tangenti colle ordinate, e per ogni altro angolo più picciolo vi saranno sempre due punti r, R, le tangenti ai quali saranno parallele a una medesima OQ.

Il punto B, che ho posto sull'asse, potea supporsi in qualunque altro punto della retta BC, sopra o sotto prolungata, aggiungendo o togliendo una costante arbitraria a tutte le ordinate pr, PR. Ma non potendo le ordinate cominciare insieme colle ascisse in O, perchè ivi $y = -\infty$, si vuol fare $y = o$ in alcun altro punto; nè ve n' ha alcuno, dove ragione il voglia fuorchè lo scelto, dove $x = 1$. Poichè y è funzion del solo rapporto de' Numeri ai Logaritmi. Ora la prima ragione, presa per misura generale ed unità dei logaritmi, essendo quella di $e : 1$, sta molto bene che sia y positivo per tutti i rapporti maggiori di $e : 1$, e negativo per i minori. I logaritmi essendo $x = \int \frac{dz}{z}$, possiamo chiamare *logologaritmi* queste seconde funzioni trascendentali $y = \int \frac{dz}{\int \frac{dz}{z}}$. Quindi come ne' logaritmi $x = o$, quando $z = 1$, $dx = dz$, così l' analogia vuole che sia il logologaritmo $y = o$, quando similmente $\int \frac{dz}{z}$

$\int\frac{dz}{z} = 1$, $dy = dz$. Oltre che non avendo la curva altro punto distinto per proprietà alcuna che il segnalatissimo dell'inflessione, non può avere proprio e vero asse che quello, che passi per questo punto.

Del resto la considerazione di $\frac{dz}{dy} = x$ ci basta a indicazione di tutto il corso della curva, potendosene facilmente conchiudere che QR, qr debbono crescere all'infinito a misura che P, e p allontanandosi da B, vanno pur crescendo all'infinito con segno contrario PR, e pr. E sarà QR sempre maggiore di qr; poichè la tangente in R, parallela ad OQ, dee venir sotto B, e la tangente in r, parallela alla medesima Oq, dee andare sopra allo stesso punto B.

Ma veniamo al calcolo; per cui è ovvia la sostituzione della nota serie, che dà il Numero mediante il Logaritmo, colla quale viene eliminato z nella equazione $dy = \frac{z dx}{x} = \frac{dx}{x}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{cc.}\right)$, onde si ha $y = K + \log.x + x + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^3}{2.3.3} + \frac{x^4}{2.3.4.4} + \text{\&c.} = K + \log.x + x + \frac{x}{2.2}A + \frac{2x}{3.3}B + \frac{x}{4.4}C + \frac{4x}{5.5}D + \text{\&c.}$, dove è K una costante, ed A, B, C, &c. il termine precedente.

Fatto in questa serie $x = 1$, $\log.x = 0$, trovo $y - K = 1,3179021513 11$. Ora è questo il caso, in cui vuol essere $y = 0$. Dunque $K = -1,3179021513 11$; ed essendo la serie più convergente a misura che scema x, non v'ha difficoltà per le y negative di B in O.

Ma per trapassare all'altra curva, fatto x negativo, s'incontra l'intoppo di $\log.x$, che diviene logaritmo di Numero negativo. Quello, che siasi fatto a superare questa ed altre difficoltà riguardanti il calcolo delle y dal canto di OL, non occorre che io qui l'inserisca, volendo piuttosto che leggasi nelle *Annotazioni* del Mascheroni ad Eulero, alle quali si aggiungano le Os-

ser-

servazioni di un mio collega nell' Accademia di Torino, il Signor Giorgio Bidoni, che verranno pubblicate nel primo Volume, che aggiungerassi prossimamente ai già stampati di questa Accademia.

Però tornando alla parte de' logaritmi positivi, per andare di B in P a determinar PR la serie trovata va scemando la sua convergenza in modo che poco si può andar avanti. Nè giova il ricorso alla integrazione per parti, per cui mezzo cominciando da $d\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{dz}{x} - \frac{zdx}{x^2} = \frac{dz}{x} - \frac{dz}{x^2}$, si ha $\int\frac{dz}{x} = \frac{z}{x} + \int\frac{dz}{x^2}$, e così continuando si ottiene $y = K + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{2.3}{x^4} + \frac{2.3.4}{x^5} + \&c.\right) = K + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}A + \frac{2}{x}B + \frac{3}{x}C + \frac{4}{x}D + \&c.\right)$. Poichè supponendovi x un numero intiero, si vede subito che la serie non converge che per il numero di termini $n = x$. Il termine $n + 1$ è uguale al precedente, che chiamerò P, e i seguenti Q, R, &c. la cui somma, a cominciare da esso termine $n + 1$, sarà $P + \frac{x+1}{x}P + \frac{x+2}{x}Q + \frac{x+3}{x}R + \&c. = \infty$, sempre che, essendo x positivo, è P positivo, e non vengono i termini alternando coi segni + , e − .

Però mi maraviglio che non siasi pensato a ricorrere al notissimo teorema di Taylor, per cui dati due valori corrispondenti α, β di x, y, determinando $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{ddy}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, $s = \frac{d^4y}{dx^4}$, &c. al valore, che hanno quando $x = \alpha, y = \beta$, si ha, in corrispondenza di $x = \alpha + v$, $y = \beta + pv + \frac{qv^2}{2} + \frac{rv^3}{2.3} + \frac{sv^4}{2.3.4} + \&c.$

Noi abbiamo generalmente $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{x}$. Dunque quando $x = \alpha$, $p = \frac{e^\alpha}{\alpha}$; $\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x$, e però $q = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)e^\alpha$;

$\frac{d^3y}{dx^3}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)e^x$, $r = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right)e^\alpha$, e così continuando trovasi $s = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{\alpha^2} + \frac{6}{\alpha^3} - \frac{6}{\alpha^4}\right)e^\alpha$, ed è facile proseguire il calcolo degli altri fattori t, u, &c. all'infinito, osservando che i numeratori del coefficiente di v^m sono m termini della serie $1 - (m-1) + (m-1)(m-2) - (m-1)(m-2)(m-3) +$ &c.; della quale il termine $m + 1$ è zero.

Così posto $\alpha = 1$, si trova $p = e$, $q = 0$, $r = e$, $s = 2e$, $t = 9e$, e seguendo gli altri fattori -44; $+265$; -1854; $+14833$; -133496; $+$ &c. tutti moltiplicanti e, mentre $\beta = 0$, si avrà $y = e\left(v + \frac{v^3}{2.3} - \frac{2v^4}{2.3.4} + \frac{9v^5}{2.3.4.5} - \frac{44v^6}{2.3.4.5.6} + \text{&c.}\right)$ e ridotti i termini all' espression più semplice $y = e\left(v + \frac{1}{6}v^3 - \frac{1}{12}v^4 + \frac{3}{40}v^5 - \frac{11}{180}v^6 + \frac{53v^7}{1008} - \frac{103v^8}{2240} + \frac{2119v^9}{51840} - \frac{16687v^{10}}{453600} + \text{&c.}\right)$ onde fatto $v = \pm\frac{1}{10}$, trovo $y = -0,27230\ 610266$ quando $x = \frac{9}{10}$, e $y = 0,27226\ 046321$ quando $x = 1,1$. Ho calcolato il precedente valore di y negativo, perchè in gran parte uno stesso calcolo serve per li due. Ma a proseguire quello dei positivi, dove è il pregio dell'opera, facciasi $\alpha = \frac{6}{5}$, onde $p = \frac{5e^{\frac{6}{5}}}{6}$, $q = \frac{5}{36}e^{\frac{6}{5}}$, &c. $y = \beta + e^{\frac{6}{5}}\left(\frac{5}{6}v + \frac{5v^2}{2.36} + \frac{65v^3}{2.3.108} - \frac{145v^4}{2.3.4.216} + \frac{995v^5}{2.3.4.5.324} - \text{&c.}\right)$. Si ha facilmente $e^{\frac{6}{5}}$ moltiplicando il modulo $0,43429\ 44819\ 03$ &c. per $\frac{6}{5}$, o aggiungendovi il quinto per averne il logaritmo Briggiano, col quale in fine delle tavole di Gardiner, di Callet, e altre si ha facil mezzo di trovare il Numero $e^{\frac{6}{5}} = 3,320117$ &c. anche fi-

no alla diciannovesima decimale. Che però non v'è difficoltà, fatto $v = \pm \frac{1}{10}$, ad avere i due valori di $e^{\frac{6}{5}}\left(\frac{1}{6}v + \frac{5v^2}{2.36} + \frac{65v^3}{2.3.108} - \text{\&c.}\right)$ de' quali il negativo sottratto da β dee dare lo stesso valore già trovato di y corrispondente a $x = 1,1$. Dunque aggiungendolo a detto valore di $y = 0,2722604$ etc. si avrà β, che è il valore di y quando $x = \frac{6}{5}$. Quindi aggiungendo a β l'altro dei due valori di $e^{\frac{6}{5}}\left(\frac{1}{6}v + \frac{5v^2}{3.36} + \frac{65v^3}{2.3.108} - \text{\&c.}\right)$ che si ha fattovi $v = \frac{1}{10}$, si otterrà quello di y quando $x = 1,3$; e proseguendo si avranno a pajo a pajo i valori di y di decimale in decimale di x all'infinito. E la serie sempre più convergendo, è chiaro che si potrebbero facilmente dare esatti anche a quindici cifre i trecento, che sono da $x = 1$ fino a $x = 30$, $z = 10686474\ 581524\frac{7}{15}$, coi quali sarebbe agevole di avere il valore di y, o sia il logologaritmo di qualunque Numero anche oltre alquanto ai dieci milioni di milioni. Poichè dato il Numero se ne trova il logaritmo naturale, che non può differire più di un ventesimo dal prossimo nei trecento, il quale fatto $= \alpha$, ed il suo Numero $= \beta$, $v < \frac{1}{20}$ renderà la serie convergentissima a determinar il logologaritmo, che si domanda.

A dar però buon saggio della serie con minor calcolo, ripreso il supposto di $\alpha = 1$, in cui fra tutti i casi di bisogno della serie n'è menoma la convergenza, avendo $y = e\left(v \mp \frac{1}{6}v^3 - \frac{1}{12}v^4 + \frac{3}{40}v^5 - \text{ec.}\right)$ facciamovi $v = \pm \frac{1}{2}$, onde $y = \pm \frac{e}{2} \pm \frac{e}{48} - \frac{e}{192} \pm \frac{3e}{1280} - \frac{11e}{11520} \pm \frac{53e}{129024} - \frac{103e}{573440} \pm \frac{2119e}{26542080} - \frac{16687e}{404486400} \pm$ ec. vale a dire e moltiplicato per la differenza, o la somma di

$\pm$

$$\pm \left\{ \begin{array}{l} 0{,}50000000 \\ 0{,}02083333 \\ 0{,}00234375 \\ 0{,}00041078 \\ 0{,}00007984 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 0{,}00520833 \\ 0{,}00095486 \\ 0{,}00017962 \\ 0{,}00003593 \end{array} \right\}$$

contentandoci di questi termini, ne abbiamo la differenza 0,51729 che moltiplicata per e dà il valore di $y = 1{,}40614$ quando $x = \frac{3}{2}$, e la somma $-0{,}53005$, che dà $y = -1{,}44082$ quando $x = \frac{1}{2}$, mentre con questo valore di x la prima serie $y = \mathrm{K} + \log. x + x + \frac{x^2}{4} + \text{ec.}$, fattovi $\mathrm{K} = -1{,}31790215$; $\log. x = -0{,}69314718$, ci dà più esattamente $y = -1{,}44089851$. Sicchè il difetto de' termini seguenti non calcolati non importa interi otto alla quinta decimale nel prodotto di e per la somma. Onde arguisco che esso difetto non vi cagionerà l'errore di 3 nel prodotto di essa e per la differenza, e però sarà $y = 1{,}40616$ *proxime* quando $x = \frac{3}{2}$.

Ora facciamo $\alpha = 2$; onde riescono i valori di $p = \frac{1}{2} e^2$ $q = \frac{1}{4} e^2$, e parimenti $r = \frac{1}{4} e^2$, $s = \frac{1}{8} e^2$, e di nuovo $t = \frac{1}{4} e^2$, a cui seguono i fattori $-\frac{1}{8} e^2$; $+\frac{7}{8} e^2$; $-\frac{41}{16} e^2$; $+\frac{43}{4} e^2$; $-\frac{383}{8} e^2$; + ec. Dove osservo che il primo valore negativo viene al fattore di ν^6, ed è già solo un' ottantesima parte del corrispondente nel supposto di $\alpha = 1$; e quello di ν^{10} è $\frac{383}{8 \cdot 133496}$, e però meno di $\frac{1}{2788}$ del corrispondente in quel primo supposto. Onde si scorge quanto già più la serie converga. E però nel calcolo i so-

soli primi otto termini $\frac{1}{2}v + \frac{1}{8}v^2 + \frac{1}{24}v^3 + \frac{1}{192}v^4 + \frac{1}{480}v^5 - \frac{1}{5760}v^6 + \frac{1}{5760}v^7 - \frac{41}{645120}v^8$ da moltiplicarsi per e^2 per avere $y = \beta + e^2\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{8}v^2 + \text{ec.}\right)$ e facendo $v = \pm\frac{1}{2}$, trovo doversi moltiplicar e^2 per 0,2868474, se v è positivo, e per —0,2237022, se negativo. Quindi trovo $y = \beta + 2{,}119524$, ed $y = \beta - 1{,}652941$, ed aggiungendo 1,652941 al logaritmo già trovato corrispondente a $x = \frac{3}{2}$ ho $\beta = 3{,}05910 = y$ quando $x = 2$, ed $y = 5{,}17863$ quando $x = 2{,}5$.

Proseguo supponendo $\alpha = 3$, che dà $y = \beta + e^3\left(\frac{1}{3}v + \frac{2}{9}\cdot\frac{v^2}{2} + \frac{5}{27}\cdot\frac{v^3}{6} + \frac{4}{27}\cdot\frac{v^4}{24} + \frac{11}{81}\cdot\frac{v^5}{120} + \frac{26}{243}\cdot\frac{v^6}{720} + \frac{29}{243}\cdot\frac{v^7}{5040} + \frac{40}{729}\cdot\frac{v^8}{40320} + \text{ec.}\right)$ e fattovi $v = \pm\frac{1}{2}$, ho i due valori $y = \beta + 3{,}97023$, ed $y = \beta - 2{,}880072$, e quindi $\beta = 8{,}05870 = y$ quando $x = 3$, ed $y = 12{,}02893$ quando $x = 3{,}5$. Con che parendomi non poter rimanere dubbio, o difficoltà nel calcolo de' logologaritmi, non porterò più oltre gli esempj; bastando anche per far concetto del progresso de' termini di tal funzione sopratrascendentale la seguente tavoletta

Logaritmi	Numeri	Logologaritmi
0,5	1,64872212	— 1,44090
1	2,71828183	0
1,5	4,48168891	1,40616
2	7,38905611	3,05910
2,5	12,1824939	5,17863
3	20,0855369	8,05870
3,5	33,1154520	12,02893

OS-

SULL' EFFLUSSO PEI TUBI ADDIZIONALI

MEMORIA

Di Giuseppe Venturoli.

Ricevuta li 29 *Giugno* 1805.

§. I.

Prima il chiarissimo Poleni nell' elegante opuscolo *de Castellis*, poscia il Sig. Michelotti, e l'Ab. Bossut si diedero a rintracciare per via d'esperienze come s'alteri la velocità dell' efflusso, e la portata d' una luce per l'apposizione d' una doccia, o tubo come dicono addizionale. I risultati de' loro esperimenti si ristringono a' seguenti fenomeni, dei quali è la cognizione utilissima.

1.° Un breve tubo cilindrico apposto ad una luce scolpita in lastra sottile diminuisce notabilmente la velocità dell' efflusso; ma insieme ne accresce notabilmente la portata.

2.° Scema la velocità nella ragione di 10:8 prossimamente; ossia di $1:\sqrt{\frac{2}{3}}$; cosicchè non più è dovuta all'altezza dell' acqua sopra del foro, ma soltanto ai due terzi di quell' altezza. La portata poi cresce nella ragione di 10: 13 prossimamente.

3.° Variando le altezze dell' acqua sopra d' una stessa luce munita dello stesso tubo, le velocità e le portate variano come le radici delle altezze.

§. II.

Quanto più costanti sono, e quanto meglio avverati cotesti fenomeni, tanto più sarebbe desiderabile di poter trarne dai noti principj della Meccanica de' fluidi una spiegazione adeguata. Nel che io non so se alcuno degli Scrittori d'idraulica siasi adoperato con successo. I più si rivolgono alla contrazione della vena sgor-

gante

gante dalla luce del vaso, la qual contrazione per l'apposizione del tubo secondo alcuni (1) vien tolta, secondo altri (2) soltanto scemata. E questi spiegano bensì in qualche modo l'accrescimento della portata, ma non spiegano in modo alcuno lo scemamento della velocità. Oltre di che rimarrebbe tuttavia a sapere, come e perchè resti la contrazione alterata per l'aggiunta del tubo.

Il nostro Consocio Sig. Venturi (3) ha ultimamente cercato di ridurre i fenomeni de' tubi addizionali ad un altro fenomeno più generale, cui diede il nome di comunicazione laterale del movimento ne' fluidi. Ma quand'anche codesta riduzione non incontri difficoltà, resterà sempre da render ragione di questa stessa comunicazione del moto laterale: senza di che non potranno aversi per ispiegati i fenomeni che ne dipendano.

Forse disanimato da tali difficoltà ebbe a dire il Sig. Vince (4) che l'applicazione de' principj e delle Leggi meccaniche al moto de' fluidi o è cosa del tutto vana, ed è mera casualità, se l'esperienza consente talvolta colla teoria, o certamente di molte limitazioni abbisogna, e di molte avvertenze sino a quest' ora sconosciute.

Ma egli è pur certo che l'esperienza non può dalla Teoria discordar mai, se non forse perchè s'ignori o si tralasci nel calcolo alcun elemento che v'abbia sensibile influenza: quindi non è fuor di speranza che un più attento esame di tutti gli accidenti che accompagnano l'efflusso da' tubi addizionali possa appressarne alla spiegazione ricercata. Ho tentata questa indagine non senza lusinga di trarne anche dei lumi sull' efflusso pe' tubi conici, delle cui leggi quelle poche sperienze che abbiamo da Poleni e da Venturi non ne istruiscono quanto basta. Dalle quali leggi dipendendo il conoscer la forma più vantaggiosa degl'incili, e degli

(1) D. Bernoulli Hydrodyn. pag. 63.

(2) Bossut Hydrodyn. (edit. de 1771) Tom. II. pag. 53, 54.

(3) Recherches experim. sur le principe de la communication laterale du mouvement dans les fluides. Paris, 1797.

(4) Phil. Transactions. 1795. Part. I.

gli emissarj, delle bocche di derivazione, o di scolo, ognun vede che questa ricerca è ben lungi dall' essere argomento di sterile curiosità.

§. III.

Giacchè intendiamo di richiamare i fenomeni de' tubi addizionali alle note leggi dell' Idraulica, gioverà esporre succintamente le formole della velocità e della pressione nelle acque correnti per vasi o tubi con moto lineare. Suppongo il moto già renduto permanente, ed il vaso alimentato da perenne influsso, onde si mantenga a livello costante. Si consideri uno strato elementare discosto dal livello del recipiente per l' ascissa verticale x; Sia p la pressione su quello strato, v la velocità, s l' altezza dovuta a questa velocità; la gravità acceleratrice esprimasi per l' unità.

Rappresentandosi adunque per l' unità la forza che sollecita lo strato elementare, sarà $\frac{dv}{dt}$ la parte di questa forza che impiegasi nel produrre l' accelerazione, ed $1 - \frac{dv}{dt}$ l' altra parte che vien distrutta, e che s' impiega nel premere.

Ora la somma delle forze prementi, cominciando dal livello del recipiente, e stendendosi a tutta l' altezza del vaso è nulla; dovendo, siccome è noto, l' intero sistema delle forze perdute equilibrarsi per se medesimo. La medesima somma estesa al tratto indefinito x rappresenta la pressione p. Quindi il valore intero dell' integrale $\int dx \left(1 - \frac{dv}{dt}\right)$, ossia dell' integrale $\int (dx - ds)$ $\left(\text{poichè } \frac{dx}{dt} = v, \text{ ed } vdv = ds\right)$ dev' essere $= 0$; ed il suo valore limitato al tratto x dev' essere $= p$.

Or sia a l' altezza verticale del vaso; P l' altezza che rappresenta la pressione atmosferica; s' l' altezza dovuta alla velocità nella superficie, ove $x = 0$; s'' l' altezza dovuta alla velocità nella luce, ove $x = a$. Il valore dell' integrale $\int (dx - ds)$ per l' in-

l' intera altezza a sarà $= a - s'' + s'$; e lo stesso valore per l'altezza indefinita x sarà $= P + x - s + s'$. Quindi le due equazioni

$$o = a - s'' + s'$$
$$p = P + x - s + s'$$

le quali due vaglion per una solà, giacchè la prima è contenuta nella seconda .

Per far uso di queste equazioni è d'uopo conoscere l'ampiezza delle sezioni suprema ed infima, e di quella intermedia per cui si ricerca la pressione. Allora siccome le altezze dovute alle velocità sono inversamente come i quadrati delle ampiezze delle sezioni, così delle tre lettere s, s', s'' una sola sarà incognita, per esempio la s''. Questa si determina, mediante la prima equazione, e la seconda poi fa conoscere il valore della pressione .

§. IV.

Nulla è più facile che l' estendere queste formole al caso di due vasi fra loro comunicanti : utile ricerca per determinare il moto ne' vasi interrotti da diafragmi . Si disegnino colle lettere grandi le quantità relative al vaso o tronco superiore , e colle picciole quelle che appartengono al tronco inferiore. Sarà l' intero valore dell' integrale

$$\int (dX - dS) + \int (dx - ds)$$

eguale a zero ; ed il suo valore indefinito eguale a p come sopra . Quindi nella stessa guisa otterremo le equazioni

$$o = A - S'' + S' \qquad p = P + A - S'' + S'$$
$$+ a - s'' + s' \qquad + x - s + s'$$

Della stessa forma riuscirebbero le equazioni per tre vasi, o per maggior numero .

Se il tronco inferiore giaccia coll' asse orizzontale, le formole non richieggono altro cangiamento fuorchè l' annullare le altezze a ed x ; dovranno farsi negative, se il tronco inferiore sia volto verticalmente all' insù ; e si dovranno moltiplicare per

Cos.φ

Cos. φ se esso tronco sia inclinato alla verticale coll' angolo φ. Tutto ciò non ha difficoltà nessuna.

§. V.

Ma trattandosi di vasi interrotti, e discontinui non è da omettere un' avvertenza importante, senza della quale l' esperienza non risponderà al calcolo colla bramata precisione. Ovunque ha discontinuità di sezioni, ivi uno strato fluido della sezione più angusta spandendosi nella più ampia perde repentinamente un grado finito di velocità. Con ciò rimane elisa una sensibil parte della sua forza sollecitante, la quale impiegandosi nel premere il fluido sottoposto, deve accelerarne il movimento.

L' effetto di questa pressione addizionale può valutarsi a questo modo. La velocità dell' acqua nel suo passaggio pel foro del diafragma è $= \sqrt{2S''}$; quella che ritiene nella sezione sottoposta è $= \sqrt{2s'}$. Quindi la velocità estinta è $= \sqrt{2S''} - \sqrt{2s'}$; e la forza perduta dallo strato che nel tempetto dt sottentra ad occupare la prima falda del tronco inferiore è $= \left(\sqrt{2S''} - \sqrt{2s'}\right)\frac{dx}{dt}$; ossia, poichè $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2s'}$, è quella forza $= 2\sqrt{S''s'} - 2s'$.

Pertanto alle formole dell' articolo precedente che rappresentano la somma delle forze perdute dagli strati acquei, vuolsi aggiungere il binomio $2\sqrt{S''s'} - 2s'$. Colla qual correzione esse diverranno, ponendo per abbreviare $K = 2\sqrt{\frac{S''}{s'}} - 1$

$$\left.\begin{array}{ll} o = A - S'' + S' & p = P + A - S'' + S' \\ \quad + a - s'' + Ks' & \quad + x - s + Ks' \end{array}\right\} \text{(E)}$$

e daranno per la velocità dell' efflusso un valore alquanto più grande.

§. VI.

Ben è vero che in pratica questo acceleramento mancherà

qualche poco della misura che ne assegnano l' equazioni precedenti . Ed eccone la cagione .

L' effetto dell' acqua affluente nell' affrettare il moto dell' acqua sottoposta dipende da quella parte della velocità dell'efflusso che rimane di subito spenta , e si converte in forza premente . Or quando l'acqua entra nella sezione inferiore sbucando fuori da una sezione notabilmente più ristretta, quella velocità non rimane tutta estinta ad un tratto : parte se ne conserva, e produce moti vorticosi ed irregolari nel fluido sottoposto: e questa parte non contribuisce punto a premerlo , ed accelerarne il corso regolare. Quanta parte della velocità vada così a disperdersi nel produr questi movimenti parziali , qual ne sia la natura e l'effetto nel ritardare l' efflusso, non sembra veramente potersi determinare per la teoria , trattandosi di movimenti complicatissimi : la sola sperienza potrebbe istruircene .

Daniello Bernoulli non curò di calcolare l' effetto dell' efflusso, nella persuasione che per lo più vada smarrito quasi del tutto pel motivo ora accennato , *totumque impendi in motum aliquem excitandum intestinum , qui mox absorbetur sine alio effectu* (1). Riconosce per altro che in certi casi quest' effetto può esser molto valutabile, e poca parte se ne perde : *sed si foramen* (del diafragma) *rationem habuerit ad amplitudinem tubi , veluti ut* $\sqrt{2}$ *ad* 1 , *vel ut* 2 *ad* 1, *aut circiter major paullulum erit motus quam qui ex ista hypothesi sequitur , quia tunc notabilem impetum faciunt aquae irruentes, nec is omnis per rei naturam perditur* (2) .

Frattanto all' uopo nostro giova avvertire alle cose sin quì notate , onde non avere a maravigliarci , se il valore della velocità dell' efflusso calcolato dalle equazioni (E) si trovasse mai peccare alquanto in eccesso .

§. VII.

Ma egli è omai tempo di considerare lo sbocco dell' acqua dal

(1) Hydrodyn. pag. 145. | (2) Ibid. pag. 133 .

dal lume d'un vaso munito di tubo addizionale. E quì prima d' ogni altra cosa assumo che dentro il tubo e precisamente alla sua imboccatura la vena che sgorga dal vaso si contrae nè più nè meno di quello che fa quando sbocca nell' aria libera. Nè mi rimove l' opinione di quelli, i quali hanno creduto (§. I) che per l' apposizione del tubo la contrazione dell' acqua sboccante fuori del vaso venga tolta, o scemata. Giacchè nè essi arrecano veruna ragione del loro sentimento, ed anzi la ragione e l' esperienza concorrono a mostrarne il contrario.

Egli è pur certo che le particelle d' acqua s' affacciano alla bocca del vaso con direzioni oblique, e convergenti tra loro, tendendo a formare la sezione angusta della vena contratta. Ora la resistenza che provano dall' acqua che riempie il tubo non può deviarle sensibilmente; poichè hanno velocità considerabile, e l' acqua del tubo movendosi essa pure, e sottraendosi al loro impeto non può opporvi notabile resistenza. Ond' è palese sussistere la contrazione nell'interno de' tubi egualmente che negli sbocchi liberi con nessuna o pochissima differenza.

Una sperienza del Sig. Venturi (1) ne porge un altro argomento assai concludente. Al lume d' un vaso adattò egli un tubo cilindrico avente alla sua origine una strozzatura che ne ristringeva l'ampiezza nella proporzione dell'area del foro alla vena contratta; ed osservò quant' acqua uscisse in un dato tempo. Levò indi quella strozzatura, e trovò uscire nel medesimo tempo la medesima quantità d' acqua. Da che si deduce che la contrazion della vena produce naturalmente nell'imboccatura de' tubi lo stesso ingombro, che vi produrrebbe un diafragma forato nel mezzo con un pertugio eguale all' area della vena contratta.

Può dunque il sistema formato dal vaso e dal tubo apposto riguardarsi come interrotto da un diafragma. E saranno applicabili a questo sistema le equazioni (E). Se ne traggono le due Proposizioni seguenti, le quali comprendono l' intera Teoria dell' efflusso pe' tubi addizionali.

(1) L. c. pag. 10, 11.

§. VIII.

Proposizione I. Sia A l'altezza verticale del vaso; a quella del tubo; l'ampiezza della luce del vaso $= n$; quella della bocca esterna del tubo $= g$. Dico che l'altezza s'' dovuta alla velocità dell' efflusso per la bocca del tubo, sarà prossimamente espressa dalla formola seguente

$$s'' = \frac{A + a}{1 + \frac{4}{g} \cdot \frac{g^2}{n^2}}$$

Riprendasi la prima delle equazioni (E) che è

$$0 = A - S'' + S' + a - s'' + Ks'$$

Dicasi α il rapporto della vena contratta all'area del foro; sarà αn la sezione del diafragma cui figuriamo apposto all' imboccatura del tubo. Essendo poi le altezze s reciproche de'quadrati delle sezioni, ed essendo la sezion del vaso amplissima in confronto di quelle del tubo, avremo

$$S' = 0; \quad S'' = \frac{g^2 s''}{\alpha^2 n^2}; \quad s' = \frac{g^2 s''}{n^2};$$

$$K = 2\sqrt{\frac{S''}{s'}} - 1 = \frac{2}{\alpha} - 1$$

Sostituiti questi valori, e fatte le opportune riduzioni, troviamo

$$s'' = \frac{A + a}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{g^2}{n^2}}$$

Ora $\alpha = 0,6$ prossimamente, e però $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = \frac{4}{9}$. Dunque etc.

§. IX.

Scema dunque la velocità dell' efflusso per l'apposizione del tubo, nè corrisponde mai all' intera altezza del recipiente. I tubi divergenti la sminuiscono più che non fanno i convergenti.

Ne'

Ne' tubi cilindrici riesce $s'' = \frac{9}{13}(A + a)$. Questo valore eccede soltanto di $\frac{1}{39}$ quello indicato dalle sperienze, il qual è (§. I) $s'' = \frac{2}{3}(A + a)$. Del quale eccesso non vuol farsi alcun conto, e perchè è picciolissimo, e perchè già ne abbiamo renduto ragione (§. VI).

Cangiandosi le altezze $A + a$, le velocità dell'efflusso variano come le radici di quelle altezze; il che pure è conforme alle sperienze (§. I).

§. X.

Conosciuta l'altezza s'' si conoscerà ancor la portata, o sia l'erogazione dell'acqua nel tempo t la quale è espressa da $gt\sqrt{2s''}$; e paragonando questa formola colle note formole che danno la portata delle semplici luci, si vedrà se il tubo avvantaggi o nò la portata, e di quanto l'avvantaggi.

Per tal modo si troverà che sotto una pari altezza $A + a$, il tubo convergente comincia ad accrescere la portata della luce, così tosto che l'ampiezza dell'esterna bocca diviene eguale ai due terzi dell'ampiezza della luce del vaso. Indi quanto meno converge il tubo, tanto maggior si ha vantaggio; e facendosi il tubo cilindrico, la portata della nuda luce sta a quella della luce armata come 10 : 13 poco più; e facendosi divergente, la portata cresce anche di più, e segue crescendo a misura della divergenza del tubo, per sin che l'acqua può seguirne le pareti, ed empierne tutta la capacità.

§. XI.

La formola $s'' = \frac{A + a}{1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{\varepsilon^2}{n^2}}$ risponde assai bene, siccome abbiam visto, alle sperienze delle doccie cilindriche. Ove si voglia

glia farne prova sulle doccie coniche, convien por mente alla contrazione cui va soggetta la vena allo sgorgare per la bocca della doccia. N' è cagione l' obbliquità colla quale s' affacciano le particelle allo sbocco, secondando l'andamento de' lati del tubo; obbliquità atta a produrre una qualche contrazione della vena all' uscire da' tubi convergenti, e per l' opposto una dilatazione ne' divergenti. Tenendo conto di questa alterazione, e sostituendo nel calcolo all' ampiezza dello sbocco del tubo la sezione della vena contratta o dilatata, crederei che le sperienze fatte con doccie coniche dovessero corrisponder così bene alla formola, come le cilindriche. Di che mi assicurano i seguenti esempj.

§. XII.

Sono veramente poche le sperienze che abbiamo di questo genere, e poco precise descrizioni ce ne lasciarono gli Sperimentatori. Quelle per esempio di Poleni sulle doccie convergenti (1) abbenchè fatte in grande, appena ponno servire, sì per la grossolana misura dei diametri delle vene ristrette, come per notabil vizio dell' apparato, del quale non si può dubitare, attesa la discordanza delle sue sperienze da quelle dell' Ab. Bossut (2). Schiveremo quanto si può questi inconvenienti col paragonare fra loro i risultati delle due sperienze fatte nelle circostanze le più diverse.

Sboccava l' acqua orizzontalmente sotto l' altezza costante di lin 256. Nel primo esperimento (3) essendo il diametro all' origine del tubo lin. 33, il diametro allo sbocco lin. 26, il diametro della vena contratta lin. 25; uscirono pollici cubici 73035 in 177". Nel secondo esperimento (4) essendo il diametro all' origine lin. 1:8, il diametro allo sbocco lin. 26 come prima, il diametro della vena contratta lin. 23, 5 uscì la stessa acqua in 185".

Ora

(1) De Castellis Art. 29 segg.
(2) Bossut l. c. Tom. II. pag. 57.
(3) De Castellis Art. 31.
(4) Ibid. Art. 33.

Ora uscendo la stessa quantità d' acqua per diverse sezioni in tempi diversi, le altezze dovute alla velocità dell'efflusso deggion essere in ragione inversa de' quadrati delle sezioni, ed inversa de' quadrati de' tempi. Perciò il rapporto tra l' altezza dovuta alla velocità dell' efflusso nel secondo esperimento, e l'altezza simile nel primo esperimento fu $\left(\frac{25}{23,5}\right)^4 \left(\frac{177}{185}\right)^2 = 1,17$.

Veggiamo ora quale riesca questo rapporto giusta la formola $s'' = \frac{A+a}{1+\frac{4}{9}\cdot\frac{g^2}{n^2}}$. Viene pel primo esperimento $s'' = 222,6$ e pel secondo $s'' = 255,82$; onde risulta il rapporto $\frac{255,82}{222,6} = 1,15$ con tenuissimo divario dal valore che ne ha mostrato l' esperienza.

Facciamo anche una prova sulle doccie divergenti; e sia una sperienza di Daniello Bernoulli, che è la settima della Sezione IV della sua Idrodinamica. Sotto l' altezza di lin. 166 l' acqua usciva per un tubetto orizzontale, di lati divergenti, essendo il diametro all' origine lin. 5 ed all' esterna bocca lin. 6,5. Si conobbe la velocità dell' efflusso misurando l' ampiezza del getto parabolico, e trovossi dovuta all' altezza di lin. 58 all' incirca. La vena si allargava allo sbocco, e Bernoulli rilevò il diametro del massimo allargamento, non già coll' attuale misura, troppo soggetta ad errore, ma con altro ingegnoso e sicuro artificio. Era questo diametro di lin. 6, 9. Quindi verrebbe per la nostra formola

$$s'' = \frac{166}{1+\frac{4}{9}\left(\frac{6,9}{5}\right)^4} = 63,5$$

con qualche eccesso sopra il valore mostrato dalla sperienza: eccesso assai lieve, ed assai giustificato per quel che si disse al §. VI.

§. XIII.

§. XIII.

Proposizione II. Rimanendo ferme le solite denominazioni, si cerchi la pressione p in una sezion qualunque del tubo, d'ampiezza z, e lontana dalla sua origine per l'ascissa verticale x. Sarà

$$p = P + A + x - (A + a)\,\frac{\frac{n^2}{z^2} + \frac{4}{9}}{\frac{n^2}{g^2} + \frac{4}{9}}$$

Prendasi la seconda delle equazioni (E) la quale è

$$p = P + A - S'' + S' + x - s + Ks'$$

Or quì abbiamo (§. VIII)

$$S' = o\,;\quad S'' = \frac{g^2 s''}{\alpha^4 n^2}\,;\quad s = \frac{g^2 s''}{z^2}\,;\quad s' = \frac{g^2 s''}{n^2}\,;\quad K = \frac{2}{\infty} - 1$$

Sostituiti questi valori; messo in luogo di s'' il valor suo (§.VIII); e finalmente fatto $\alpha = o$, 6 esce il valore di p annunciato nella Proposizione .

§. XIV.

Moltissime conseguenze scendono da questa formola; ma per non divagar troppo, ci ristringeremo a notarne alcune concernenti i tubi orizzontali, pei quali essendo $x = o$, $a = o$, riducesi la formola alla seguente

$$p = P + A\left\{1 - \frac{\frac{n^2}{z^2} + \frac{4}{9}}{\frac{n^2}{g^2} + \frac{4}{9}}\right\} \text{ ovvero } p = P + A\,.\,\frac{1 - \frac{g^2}{z^2}}{1 + \frac{4}{9}\,.\,\frac{g^2}{n^2}}\,.$$

Quì se il tubo è cilindrico, vien $p = P$. È dunque in tali tubi la spinta laterale dell'acqua costante, e per tutto ugnale alla pressione dell' atmosfera. Aperto un picciol pertugio ne' loro fianchi non ne uscirebbe punto d'acqua, nè pur una bolla vi s'introdurrebbe dell'aria esterna. E ciò pienamente confermasi dall'

espe-

esperienza, quando i tubi sien brevi, quali quì si suppongono (1). Convien però eccettuarne un picciol tratto in vicinanza dell' origine: poichè ivi formandosi la strozzatura in grazia della contrazione (§. VII) la sezion viva *z* riesce minore della sezione *n* o *g* del tubo, e la pressione divien minore di P. E tale appunto la mostrano le sperienze (2).

Se il tubo è convergente, si ha *p* maggiore di P. La pressione sui lati è dunque maggiore della pressione atmosferica, ed aprendovi un foro, l'acqua ne uscirebbe. Non so che se ne sia fatta la sperienza, ma l' esito non n' è dubbio.

Pel contrario ne' tubi divergenti è *p* minore di P, e le pareti sono più premute dall' aria esterna all' indentro, che non dall' acqua interna all' infuori. Per un pertugio aperto ne' fianchi entra l' aria, e si frammischia alla vena corrente. Di ciò Bernoulli e Venturi si sono con replicate prove accertati (3).

§. XV.

Quest' ultimo caso, cui prima d' ogni altro avvertì il celebre Daniello Bernoulli, è degnissimo d' osservazione, come quello che rende chiara ed adeguata ragione di moltissimi accidenti che la natura ci pone continuamente sotto gli occhi, e che sembrano a primo aspetto maravigliosi e paradossi. Non d' altra cagione trae origine quel fenomeno, cui piacque al Sig Venturi disegnar col nome di comunicazion laterale del moto ne' fluidi, e che nel più volte citato elegantissimo Opuscolo illustrò d' assai belle sperienze e riflessioni. Questo consiste nella proprietà che ha un getto fluido di attrarre, e strascinare con se le particelle d'aria, o d' acqua che gli stanno, o vengono a fianco. Or ciò accade allorquando tale è la forma del getto, che la pression

(1) Bossut l. c. Tom. II. pag. 180, 181.

(2) Venturi l. c. pag. 13, 14 e 37.

(3) Bernoulli Hydrodyn. pag. 275, 276. Venturi l. c. pag. 27.

laterale dell' acqua corrente riesce minore della pressione dell' atmosfera circostante : allora la prevalente pressione dell' atmosfera spinge a forza entro il getto le contigue particelle sia d'aria, sia d' acqua, e queste vengono poi strascinate dalla corrente . La forza colla quale vengono attratte è tanta, quanto è l' eccesso della pressione atmosferica sopra la spinta laterale dell' acqua .

La formola del §. XIII palesa e distingue i casi ne' quali ha luogo questa comunicazion laterale del moto . E già nei getti , o corsi d'acqua orizzontali essa ha sempre luogo, qualora il getto o per le direzioni da principio impresse, o per le resistenze che incontra sul suo cammino rendesi divergente . Nelle cascate verticali la vena cadente tende ad assottigliarsi prendendo la forma di quella conoide iperbolica che fu determinata dal celebre Guglielmini (1). In questa forma di getto la spinta laterale è costante, uguale alla pressione atmosferica ; nè darebbe luogo alla comunicazion laterale del moto . Ma la resistenza dell' aria non permette alle particelle dell' acqua di converger tanto ; quindi tosto la pression laterale divien minore dell' atmosferica , ed il moto si comunica lateralmente . Nelle cascate molto alte la pressione scema tanto, che diviene negativa ; ed è allora che il getto si sparpaglia , dividendosi in minuti spruzzi .

§. XVI.

Soggiungerò per ultimo un' avvertenza circa l' uso del canone idraulico-statico di Daniello Bernoulli (2) per misurar la pressione dell' acque correnti . Consiste questo canone nel seguente teorema : la pressione dell' acqua in ogni sezione del tubo o vaso è rappresentato dall' altezza dovuta alla velocità che ivi prenderebbe l' acqua, se il tubo terminasse in quel luogo , meno l' altezza dovuta alla velocità attuale : alle quali altezze vuol-

(1) Mensura aquarum fluentium Lib. V. Prop. 9 .

(2) Hydrodyn. pag. 262.

vuolsi certamente aggiungere l' altezza che rappresenta la pressione atmosferica, quantunque Bernoulli non ne faccia espressa menzione.

Or questa regola non è così generale che possa indistintamente a tutti i casi applicarsi. Un facile e sicuro criterio de' casi ne' quali essa vale, lo somministrano le formole precedenti. Abbiamo per un vaso continuo (§. III) $p = P + x - s + s'$. Quì se la superficie del recipiente è amplissima rispetto alla sezione per cui cercasi la pressione, sarà s' piccolissimo in confronto di s e potrà omettersi; onde $p = P + x - s$; che è appunto l' espressione della regola di Bernoulli. Ma nè pur le sezioni di grandezza paragonabile a quella della sezione suprema, nè per le sezioni de' vasi discontinui il valor della pressione mai non può ridursi all' espressione Bernoulliana. Veggano adunque di non estender di troppo la regola di Bernoulli coloro, i quali riguardandola come dimostrata generalmente l' applicano indistintamente non solo a' tubi, ma anche ai canali ed a' fiumi, senza alcun riguardo nè all' ampiezza delle sezioni, nè agl' interrompimenti del moto.

SULLA DEVIAZIONE MERIDIONALE DEI GRAVI LIBERAMENTE CADENTI

MEMORIA II.

Di Girolamo Saladini.

Ricevuta il dì 30 *Giugno* 1805 .

Alcuni sono d' opinione che la deviazione meridionale de' Gravi liberamente cadenti per l' aria resistente, da me ritrovata comecchè piccolissima (*a*), sia affatto nulla come nel vóto . Per sostenere una tale opinione è necessario dimostrare l' eguaglianza de' due archi OI , OL (Fig I) ancor nel caso della caduta per l' aria resistente, come l' ho dimostrata nella caduta pel vóto . Ma tal dimostrazione a me sembra impossibile , imperciocchè l' arco OL è lo stesso identico nei due casi . per essere l' arco compreso tra la direzione della gravità assoluta, e la direzione del pendolo , che sono le stessissime in ambedue i casi ; al contrario l' arco OI cangia al cangiare che fa il tempo della caduta a cui è proporzionale : dunque se nella caduta libera nel vóto questi due archi OL , OI si sono ritrovati eguali , eguali essere non potranno nella caduta per l' aria resistente, perchè il tempo della caduta da una determinata altezza per esempio dalla Torre degli Asinelli nel vóto è minore del tempo, quando il corpo cada per la stessa altezza nell' aria . Dunque l' arco OI che è proporzionale al tempo della caduta è minore nella prima supposizione , che nell' altra . Dunque se IL, che rappresenta la deviazione meridionale è nulla nella supposizione del vóto , non lo sarà nella supposizione dell' aria resistente .

(*a*) Tomo IX. di questa Società , pag. 352 , e segg.

Il prolungamento del tempo, come nella caduta per l' aria resistente, si otterrebbe similmente nel vóto, se la Gravità assoluta fosse proporzionatamente minore di quella che è presentemente . Da questa gravità così diminuita combinata colla forza centrifuga risulterebbe la deviazione del Pendolo XL maggiore di quella che è presentemente; imperciocchè nel triangolo XZL rimanendo sempre costante l' angolo di latitudine LZO, la retta ZL esprimente la forza centrifuga e la sua direzione, avrebbe maggiore ragione alla ZX esprimente la gravità assoluta diminuita, e la sua direzione, di quella ragione che ha la forza centrifuga alla gravità assoluta intiera; onde l' angolo LXZ verrebbe ad ingrandirsi come facilmente ricavasi dalla Trigonometria; e perciò l' arco OL ancor esso diventerebbe maggiore, e se si applicano a questa ipotesi le formole nostre della caduta libera nel vóto, i due archi OL, Ol si ritroverebbero eguali, disparendo la loro differenza Ll, nè apparirebbe alcuna deviazione meridionale . Ma nel caso della caduta nell aria resistente, benchè si abbia la gravità assoluta diminuita, e si abbia quindi prolungamento di tempo della caduta per la stessa altezza, e perciò ingrandimento dell' arco OL, che è proporzionale a questo tempo, tuttavia non si altera l' arco OL, ma rimane lo stesso identico come nella supposizione della caduta nel vóto; onde necessariamente debbe nascere l' eccesso IL, che indica una deviazione meridionale .

Acciocchè questa dottrina sia messa in tutto il suo lume non stimo superflua la seguente dimostrazione .

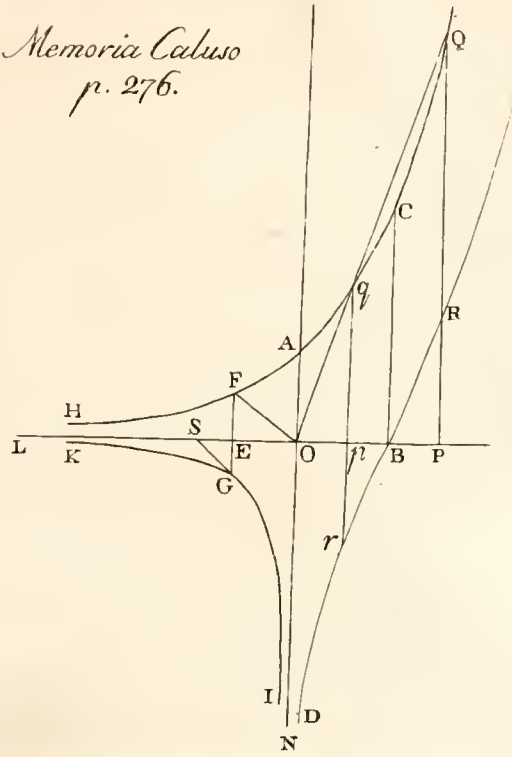
Rappresenti ESQ (Fig. II) il Meridiano appartenente al vertice X della Torre BX , la cui direzione XBV è quella del pendolo che chiamasi verticale , la CX sia la direzione della gravità assoluta , la PB parallela all' Equatore sarà la direzione della forza centrifuga del vertice X; dunque le tre forze cioè gravità assoluta , gravità relativa , forza centrifuga , tutte costanti , sono rappresentate in quanto all' intensità , e alla direzione dalle tre rette XP . XB , BP ; quindi l' istesso corpo , che in un dato tempo percorre XP con moto equabilmente accelerato spinto

to dalla gravità assoluta, nello stesso tempo percorre XB altezza della Torre se sia sollecitato dalla gravità relativa, ossia della gravità assoluta combinata colla centrifuga. Ora venne già da me dimostrato (*b*) e da altri in seguito, che un corpo lasciato dal vertice X a se stesso, ossia liberamente cadendo dal vertice X, descrive una parabola, il cui piano passa per la direzione CX della gravità assoluta, e per la normale al meridiano ESQ nel punto X, e che esso raggiunge la Terra quando si ritrova nel parallelo che passa per il punto B base della Torre BX, e che per ciò non avvi alcuna deviazione meridionale, supposto però che il grave descriva la sua Parabola nel vóto. Fingasi adesso che il grave lasciato in sua balìa, mentre descrive la sua trajettoria incontri la resistenza dell' aria. Osserviamo in primo luogo, che questo corpo non esperimenta resistenza alcuna secondo la direzione perpendicolare al meridiano ESQ, ossia secondo la direzione tangenziale per cui è stato scagliato nel distaccarsi dalla cima della Torre; imperciocchè rotando l' atmosfera unitamente alla Terra per la stessa direzione e colla stessa velocità con cui è scagliato il corpo non può concepirsi urto sensibile del corpo stesso contro l' aria nella sopraccennata direzione: la resistenza adunque si ha nella direzione CX della gravità assoluta, perchè in questa direzione l' aria relativamente al corpo, che per essa discende è immobile; una tal resistenza sul principio della discesa è debole, poi cresce secondo qualche funzione della celerità; la ricerca di questa funzione servirebbe alla precisione del calcolo, ma è superflua per dimostrare ciocchè è mio intendimento. Supporremo per tanto che la gravità assoluta venga fino da bel principio diminuita d' una quantità determinata e sensibile, come sarebbe della quantità media tra quelle che prova il corpo nel tempo della discesa fino che giunga alla Terra. Egli è cosa indubitata, che la gravità così diminuita avrà minor ragione alla forza centrifuga del punto X di quella che ha la gravità assoluta e intera al-

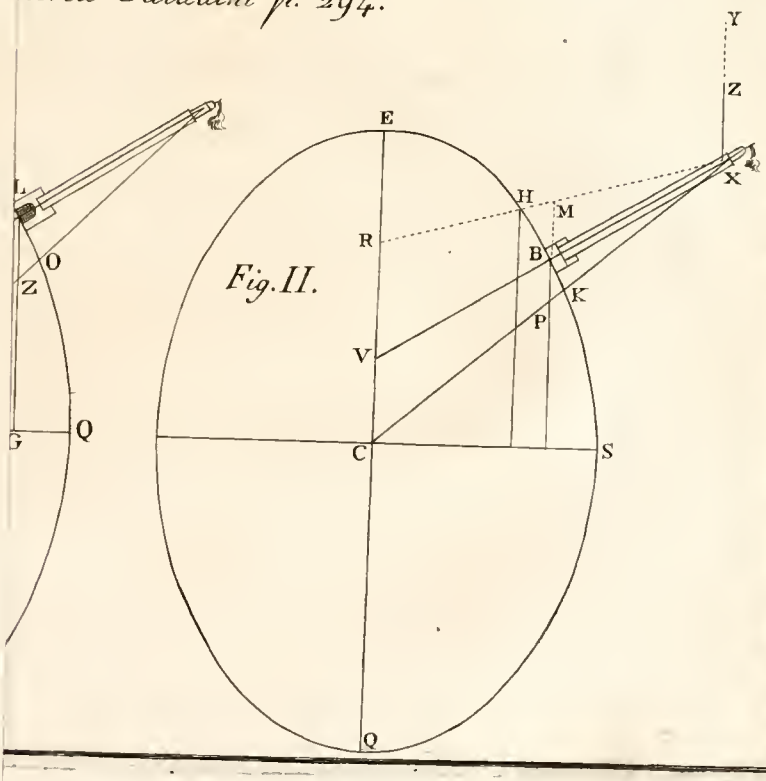
(*b*) Tomo VII. *degli Atti dell' Accademia delle Scienze di Siena detta de' Fisiocritici*, pag. 55, e segg.

.193.

Memoria Caluso p. 276.



noria Saladini p. 294.



Memoria Franchini p. 193.

Fig. I.

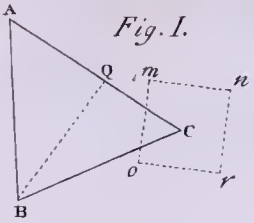
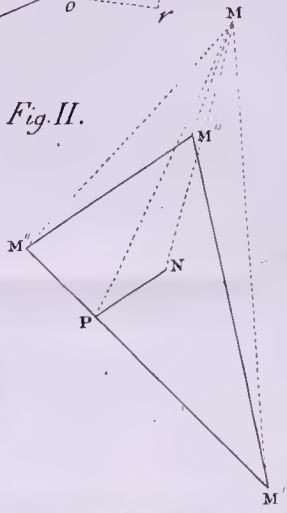
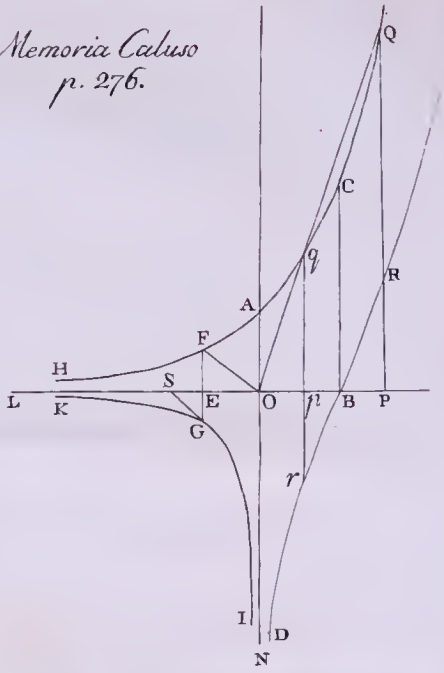


Fig. II.



Memoria Caluso p. 276.



Memoria Saladini p. 294.

Fig. I.

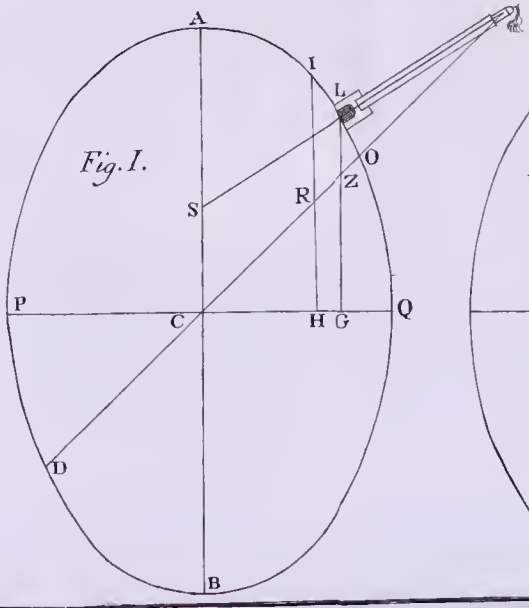
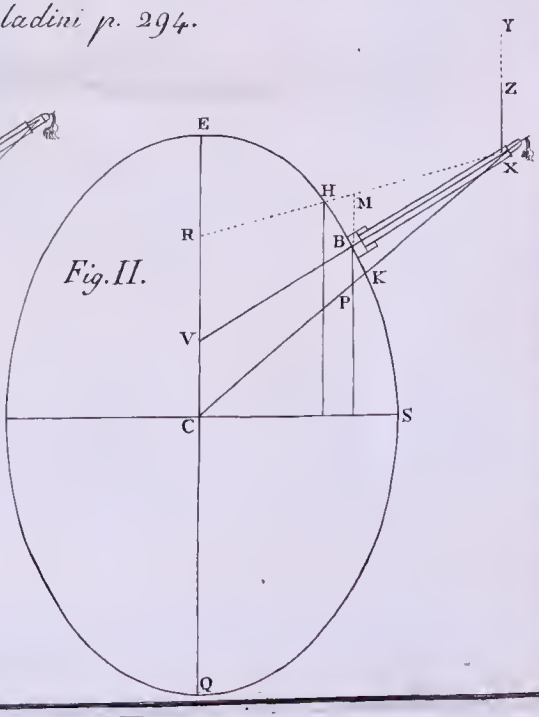


Fig. II.



alla stessa forza centrifuga; sicchè se si dovesse determinare la direzione del pendolo agitato dalla gravità assoluta diminuita, e dalla forza centrifuga combinate insieme, la direzione del pendolo corrispondente XR sarebbe più meridionale della XV, perchè se PX rappresenti ancor in questa supposizione la quantità della gravità assoluta, ma diminuita, la PB, non potrà più rappresentare la quantità della forza centrifuga in X, ma converrà crescere la PB per esempio fino in M, e condotta XM più meridionale che XV sarà essa la direzione del pendolo rispettivo; ma per le cose dimostrate il corpo sollecitato dalla gravità qualunque sia la sua intensità, e perciò ancorchè sia diminuita, deve alla fine della discesa ritrovarsi nello stesso parallelo in cui la direzione del pendolo rispettivo ferisce la terra; dunque il corpo in fine della caduta deve ritrovarsi nel parallelo H dove la XR taglia la superficie della Terra, e se la Torre fosse stata innalzata secondo la verticale XM conveniente alla forza combinata da quella della gravità diminuita, e della forza centrifuga, il corpo si ritroverebbe sicuramente nel parallelo dove fosse la base H della Torre HX; ma questo punto è più meridionale del punto B base della Torre BX: onde quando il corpo raggiunge il parallelo che passa per B base della Torre BX non potrà aver raggiunto la Terra, ma si troverà in M come mi ero proposto di dimostrare.

Gli esperimenti del Sig. Guglielmini riferiti dal Sig. De la Lande danno una deviazione meridionale di linee cinque, come in circa esige la mia Teoria. Le sperienze d'Amburg del Sig. Henzenberg danno similmente una deviazione meridionale. [*Addictions du Rédacteur* alla Memoria del Signor De la Place (*c*)].

SAG-

(*c*) Memoire sur le mouvemens d'un corps, qui tombe d'une grande hauteur par le C. De la Place. Boulletin des Sciences par la Société Philomatique: Paris Prairial A. II. de la Republique N. 76 pag. 109.

SAGGIO

DI ALCUNI PROBLEMI NUMERICI

Di Gianfrancesco Malfatti

Ricevuto il dì 1 *Luglio* 1805.

La famosa proprietà dell' Ipotenusa nel triangolo rettangolo, ritrovata, e con tanta eleganza dimostrata dal Filosofo di Samo, fece nascere nella sua Scuola la curiosità, trasferendo le linee al numero astratto, d'indagare in quai temi di numeri intieri o rotti, si verificasse che il quadrato di uno di quei numeri, fosse uguale alla somma dei quadrati degli altri due, e ne andarono formando di lunghe serie regolate da una certa legge, che non ne rendeva difficile il rintracciamento. Sorse ne' più bassi tempi il celebre Diofante Alessandrino, il quale (si suppone con una specie d' Algebra da lui occultata, e a noi affatto ignota) si accinse a risolvere de' Problemi numerici, di lor natura indeterminati, colla condizione dei numeri intieri escludendone i rotti, la quale introduce bensì nel Quesito una certa non intiera determinazione, ma serve a rendere più difficile la loro risoluzione. Nel progresso de' tempi, dopo il prezioso dono fatto dagl' Indiani agli Arabi, della eccellente Aritmetica che ora usiamo, e dopo che il Monaco Gerberto, che fu poi Papa col Nome di Silvestro II, ito ad attingere tal dottrina ai fonti dei dotti Arabi Spagnuoli, la diffuse, con una felice rivoluzione, alla maggior parte delle Provincie Europee, verso la fine del X Secolo della nostra Era, non mancarono di quando in quando Geometri di qualche nome, che si occuparono volentieri nella Scienza de' numeri, indagandone or l'una or l' altra proprietà sino ai loro tempi sconosciuta; e allorchè, vinta la barbarie de' Secoli precedenti, si ristabilirono le Scienze nelle nostre contrade, andarono pullulando, or nell' uno, or nell' altro paese, de' valent' uomini, che dilatarono, sempre più,

più, questo ramo di Scienza su i numeri, confrontando i prodotti, e quadrati, e cercando quai numeri interi soddisfacessero alle generali formole da loro immaginate. Tra gli altri si distinsero il Frenicle, il de Fermat, ed altri di nome celebre, nè sdegnò a' nostri giorni di occuparvisi seriamente il sommo Geometra Lagrange, che in Problemi di simil sorta ci ha fatto dono negli Atti di Berlino di una lunga, e profonda dissertazione.

Io entro presentemente in una simile indagine, coll'occasione di una domanda fattami da dotta Persona di Parma, la quale avendo trovato con generale formola il modo di esibire, e uno, e infiniti quadrati, ciascun de' quali fosse uguale alla somma di tre quadrati, chiedevami come, coll'altra generale formola si potesse sciogliere quest' altro Problema: dato qualunque numero, ritrovare gli infiniti quadrati, ciascuno de' quali moltiplicato per quel numero, venisse a formare un prodotto uguale alla somma di tre quadrati. Meditando, per soddisfare alla gentile inchiesta, sul proposto Quesito, a poco a poco mi riuscì di ritrovare un metodo che poteva generalizzare il Problema, senza restringerlo al numero di tre soli quadrati; e questo è ciò che intendo presentemente di esporre ne' paragrafi susseguenti.

Prima di tutto mi convien provare che tutti i numeri intieri sono spezzabili o in due, o in tre, o in quattro quadrati, cosicchè se vogliamo anche computare il quadrato del zero, si potrà dire, compresi gl' istessi numeri che sono di lor natura quadrati, che non v'ha numero che non possa essere spezzato in quattro quadrati. Cominceremo l' Esame dai numeri dispari, i quali son tutti compresi dalla formola generale $2n-1$. Se in questa generale formola n è numero pari, non è possibile che i numeri in essa compresi possano spezzarsi in tre quadrati un de'quali sia dispari, e gli altri due pari, e così nemmeno in due quadrati l'un dispari, e l'altro pari. In questa ipotesi fatto $n = 2m$, si cangerà la formola in quest' altra, $2^2m - 1$; e fatto $2p - 1$ la radice del quadrato dispari, $2q$, $2r$, quelle dei quadrati pari, se fosse possibile che $2^2m - 1$ fosse uguale ai quadrati di quelle tre radici avrebbesi l' Equazione $2^2m - 1 = 2^2p^2 - 2^2p + 1 + 4q^2 + 4r^2$,

ovvero $2^2m-2 = 2^2p^2 - 2^2p + 4q^2 + 4r^2$, il che non può essere, perchè abbiam un sol termine moltiplicato per 2, mentre gli altri sono moltiplicati per il suo quadrato. Quindi affinchè possa ciò verificarsi fa d' uopo che sia n numero dispari, che esprimeremo con $2m - 1$, e cangerassi allora la formola $2n - 1$ in quest' altra $2^2m - 3$, la quale nella supposizione dei suddetti tre quadrati ci presenta l'Equazione $2^2m-3=2^2p^2-2^2p+1+4q^2+4r^2$, ossia $2^2m-2^2=2^2p^2-2^2p+2^2q^2+2^2r^2$, che non porta ad alcun assurdo. Stendiamo ora la serie de' numeri dalla anzidetta formola originati col dare al simbolo m i valori successivi dei numeri naturali. Fatto $m = 1$, si ha $4 - 3 = 1$; se $m = 2$, nasce $8 - 3 = 5$, e andando avanti risulta la serie aritmetica 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. ec. Poichè nella serie de' numeri pari, entra anche il zero, sarà facile coll' aggiunta anche del quadrato di questo zero, stabilire i tre quadrati, equivalenti a ciascun numero della serie, uno de' quali sia dispari e gli altri due pari. Per ognuno dei suddetti numeri, metto quì sotto la serie di tale spezzatura

1 . 1 . 1 . 9 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . ec.
0 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 16 . 16 . 4 .
0 . 0 . 4 . 0 . 4 . 16 . 0 . 4 . 4 .

Si produca pur oltre la serie quanto piaccia e non si troverà numero in essa che non ammetta una simile spezzatura; anzi si dee riflettere che un qualche numero potendo essere in diverse maniere spezzato in tre quadrati, sempre un d'essi sarà dispari, e gli altri due pari. Non nasca dubbio, che la stessa formola $2^2m - 3$ accetti numeri che possano essere spezzati in tre quadrati dispari, perchè tale ipotesi ci conduce allo stesso assurdo, nelle conseguenze di un numero pari-dispari uguale ad un aggregato di numeri pari-pari. Imperciocchè suppòste le radici de' quadrati dispari; $2p - 1$, $2q - 1$, $2r - 1$, potrebb' essere $2^2m - 3 = 2^2p^2 - 2^2p + 1 + 2^2q^2 - 2^2q + 1 + 2^2r^2 - 2^2r + 1$, ovvero colla traslazione delle tre unità, $2^2m - 6 = 2^2p^2 - 2^2p + 2^2q^2 - 2^2q + 2^2r^2 - 2^2r$; il che è impossibile, perchè 6 è l' unico numero pari-dispari che abbiamo in quest' Equazione.

Poi-

Poichè un numero dispari può anche ammettere la spezzatura in tre quadrati dispari, conviene dar la formola generale, che abbraccia tutti questi numeri. Questa formola è 2^3n-5, dalla quale nasce col dare a n i valori di 1.2.3.4.5.6 ec. la seguente serie 3.11.19.27.35.43.51.59.67.75.83 ec. cui corrisponde la seguente de' tre quadrati dispari

1 . 9 . 9 . 25 . 25 . 25 . 25 . 25 . 49 . 25 . 49 . ec.
1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . 25 . 9 . 25 . 25 .
1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . 9 .

avvertendo quì pure che potendosi alcun di questi numeri spezzare in tre quadrati diversi dei notati, saran sempre dispari i tre nuòvi quadrati.

Poichè la formola dei numeri che si spezzano in tre quadrati dispari è 2^3n-5, se aggiungo a questa formola il quadrato 4 e conseguentemente faccio la medesima aggiunta a ciascuno terno dei quadrati suddetti, la formola si cangia in 2^3n-1, la serie de' numeri compresi da questa formola, cominciando dal minimo è, 7 . 15 . 23 . 31 . 39 . 47 . 55 . 63 . 71 . 79 . 87 ec., e tutti questi numeri non possono essere spezzati che in quattro quadrati, tre dispari e un pari che è sempre il 4; ed ecco quì sottoposta la serie delle spezzature

1 . 9 . 9 . 25 . 25 . 25 . 25 . 25 . 49 . 25 . 49 . ec.
1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . 25 . 9 . 25 . 25 .
1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . 9 .
4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 .

Mi piace ancora di dimostrare ciò che superiormente ho detto, non potersi spezzare in meno di quattro quadrati i numeri compresi dalla formola 2^3n-1. Perchè essendo sempre 2^3n-1 numero dispari è chiaro non poter essere i tre quadrati che o un dispari, e due pari, o tre dispari. Nel primo caso avendosi l'unità nell'ultimo termine del dispari, e riuscendo tutti gli altri termini dell' omogeneo di comparazione, moltiplicati per quattro, trasportata la suddetta unità nel primo membro, diventa esso 2^3n-2 un numero pari-dispari, che non può mai essere uguale, a un aggregato di numeri pari-pari. Nel secondo caso, potrebbe

valere questa Equazione $2^3n - 1 = 2^2p^2 - 2^2p + 1 + 2^2q^2 - 2^2q + 1 + 2^2r^2 - 2^2r + 1$, da che nascerebbe $2^3n - 2^2 = 2^2(p^2 - p + q^2 - q + r^2 - r)$, ossia dividendo l' Equazione per quattro; $2n - 1 = p^2 - p + q^2 - q + r^2 - r$. Ma $p^2 - p$ non può essere che un numero pari, e pari egualmente i numeri $q^2 - q$, $r^2 - r$, mentre $2n - 1$ è necessariamente un numero dispari. Dunque non può verificarsi che i numeri della formola $2^3n - 1$ siano spezzabili in tre soli quadrati.

Le tre serie competenti alle tre formole de' numeri dispari sopra esposti si dispongano nella maniera seguente

2.ª	3		11		19		27		35		43		...	$2^3n - 5$
1.ª	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	...	$2^2n - 3$
3.ª		7		15		23		31		39		47	...	$2^3n - 1$

Nella disposizione figurata data a queste tre serie si cominci dal primo termine della prima, si salga al primo della seconda, si ritorni al secondo della prima, e si discenda sin al primo della terza, coll' istess' ordine prendendo il terzo della prima, il secondo della seconda, il quarto della prima, e il secondo della terza, e così di mano in mano andando avanti nei quattro numeri successivi delle tre serie, si viene a formare la serie; 1.3.5.7.9.11.13.15 ec., cioè la serie di tutti i numeri dispari, che si è fatto vedere essere o quadrati, o spezzabili in due, o in tre, o al più in quattro quadrati. Ciò però non esclude che alcuni di questi numeri dispari non si possano spezzare in cinque, in sei ec. quadrati, ma sempre, o quei cinque, o quei sei quadrati che formano un tal numero, potranno essere ridotti al più a quattro quadrati, formanti in somma lo stesso numero.

Dai numeri dispari facendo transito ai numeri pari-dispari; questi restan tutti compresi nella formola $2^2n - 2$; dalla qual risulta la serie; 2 . 6 . 10 . 14 . 18 . 22 . 26 ec., fuor di questi non ve n' ha alcuno, e son tutti spezzabili, compreso il zero in tre quadrati, due dispari, e un pari, non potendo essere uguali a tre quadrati pari, e molto meno, a un dispari, e due pari, o a tre dispari, come chiaramente si vede. Soggiungo ora la serie corrispondente pei termini della superiore a tali spezzature

0 . 4 . 0 . 4 . 16 . 4 . 16 . 4 . 16 . 4 . 16 . ec.
1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 9 . 9 . 25 . 9 . 25 . 25 .
1 . 1 . 9 . 9 . 1 . 9 . 1 . 1 . 9 . 9 . 1 .

nella quale ripeteremo la consueta riflessione fatta altre volte, che molti numeri dell'anzidetta serie ammetteranno diverse spezzature, ma sempre colla legge di due quadrati dispari, e un pari, compreso qualche volta il zero.

Restano da considerarsi i numeri pari-pari, i quali divideremo in due classi. Nella prima porremo quelli che son divisibili sol per quattro, lasciando per quoziente un numero dispari, nella seconda, quei che possano essere divisi per 2^{2+m}, ove m sia qualunque numero intero. Quei della prima classe si vede evidentemente che possono essere spezzabili al più in quattro quadrati. Imperciocchè essendo un numero dispari il quoziente di tai numeri dopo la divisione per quattro, ed avendo noi fatto vedere che tutti i numeri dispari sono al più spezzabili in quattro quadrati, poichè il moltiplicator quattro di questi quadrati, è esso pure un quadrato, risulteran quadrati anche i prodotti del quattro, in ciascun dei suddetti quadrati, onde non potrà dubitarsi che non ammettano tai numeri, pari-pari, la accennata spezzatura, che sarà al più di quattro quadrati pari.

Quest' istessi numeri, i quali dopo la divisione per quattro, lasciano un quoziente che è numero dispari, possono anche tutti essere spezzati in quattro quadrati dispari, non ammettendo alcun assurdo l' Equazione $2^3n - 2^2 = 2^2p^2 - 2^2p + 1 + 2^2q^2 - 2^2q + 1 + 2^2r^2 - 2^2r + 1 + 2^2t^2 - 2^2t + 1$, nella quale come è chiaro il primo membro è la formola comprendente tutti i numeri pari-pari che nascono dal prodotto per quattro di tutti i numeri dispari. Nell'Equazione superiore trasportate le quattro unità del secondo al primo membro, risulta $2^3n - 2^2 = 2^2p^2 - 2^2p + 2^2q^2 - 2^2q + 2^2r^2 - 2^2r + 2^2t^2 - 2^2t$ ovvero, $2n - 2^2 = p^2 - p + q^2 - q + r^2 - r + t^2 - t$, che non porta ad alcun assurdo, perchè i termini nel secondo membro forman tre coppie necessariamente pari. La serie de' numeri pari che appartengono alla formola $2^3n - 2^2$ è la seguente ; 4.12.20.28.36.44.52.60.68 ec.,

ec., e la serie della spezzatura secondo l'ordine de' suddetti numeri è questa

1 . 9 . 9 . 9 . 9 . 25 . 25 . 25 . 25 . 25 . ec.
1 . 1 . 9 . 9 . 9 . 9 . 9 . 25 . 25 . 25 .
1 . 1 . 1 . 9 . 9 . 9 . 9 . 1 . 9 . 9 .
1 . 1 . 1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 1 . 1 . 9 .

La serie de' numeri della seconda classe, i quali restan tutti compresi nella formola $2^{2+m} \times \overline{2n-1}$ è quella di tutti gli altri numeri pari possibili. Ora la parte m dell'esponente $2+m$ è un numero dispari, o un pari: se pari 2^{2+m} è sicuramente un quadrato: se dispari, il doppio d'un quadrato. Quando m è pari, la formola $2n-1$ essendo un numero dispari, potrà ciascun di questi numeri essere spezzato al più in quattro quadrati, onde anche i numeri $2^{2+m}.\overline{2n-1}$ riceveranno tale spezzatura, che sarà determinata dalla appartenenza del numero dispari $2n-1$ all'una, o all'altra delle superiori formole da noi notate per i numeri dispari. Oltre questa può avere anche l'altra spettante al numero dispari moltiplicato per quattro. Perchè essendo $2^{2+m}.\overline{2n-1}$ uguale $2^m.4.\overline{2n-1}$, potendosi il numero $4.\overline{2n-1}$ spezzare in quattro quadrati dispari, poichè 2^m è quadrato, si avranno colla moltiplicazione, anche quattro nuovi quadrati pari nei quali potranno essere spezzati quei medesimi numeri.

Se poi m è numero dispari si potrà sempre cangiare $2^{2+m}.\overline{2-1}$ in quest'altra maniera $2^{2f}.2.\overline{2n-1}$. Ma $2.\overline{2n-1}$ rappresenta tutti i numeri pari-dispari, i quali si è veduto sopra, che sono spezzabili in tre quadrati. Quindi concluderemo che tutti i numeri che può dar la formola $2^{2+m}.\overline{2n-1}$ ove m sia dispari saranno spezzabili in tre quadrati.

I numeri della formola 2^3n-1, non essendo spezzabili che in quattro quadrati, se moltiplicheremo la formola per 2^{2+m}, onde nasca $2^{2+m}.(2^3n-1)$, se l'esponente m sarà dispari, equivalerà alla formola $2^{2f}.2.(2^3n-1)$, e siccome i numeri $2(2^3n-1)$ son pari-dispari e perciò spezzabili in tre quadrati, essendo pure 2^{2f}

qua-

quadrato, anche quelli della formola $2^{2+m}.(2^3n-1)$ potranno essere spezzati in tre quadrati. Ma se m è numero pari, il moltiplicatore 2^{2+m} è un quadrato e 2^3n-1 abbraccia i numeri che vogliono la spezzatura di quattro quadrati; a tale spezzatura saran pur soggetti, quei della formola $2^{2+m}.(2^3n-1)$. Altri quattro quadrati pure degl' istessi numeri si possono avere, cangiando prima la formola equivalentemente così $2^m.4.\overline{2^3n-1}$, ove i numeri $4.\overline{2^3n-1}$ divisi per quattro, lasciano un numero dispari di quoziente, e però divisibile, in quattro quadrati dispari, onde ciascun d' essi moltiplicato, per 2^m che è pur quadrato, ci risulteranno altri quadrati diversi dai precedenti. Con una sol formola perciò noi potremo raccogliere tutti quei numeri, i quali nè son quadrati, nè spezzabili, o in due, o in tre quadrati, e non ricevono che la spezzatura di quattro. Questa è la formola $2^{2m-2}.\overline{2^3n-1}$, nella quale se $m=1$ si ha la serie dei numeri dispari 7.15.23. ec., e se m è qualunque altro numero, i quattro quadrati che risultano, sono i quattro pari sopra mentovati. Tutti gli altri numeri che si sottraggono da quest' ultima formola, o son quadrati, o ammettono la spezzatura di due o di tre quadrati.

Suppongasi per esempio che un Generale avendo nella sua armata 41500 soldati, gli fosse opportuno, di dividerla in tre Battaglioni o falangi quadrate, e chiedesse ai suoi ingegneri le diverse maniere di ottenerle, per iscegliere quella che fosse più al caso per le sue viste Militari. L' ingegnere interrogato, prima di tutto divide quante volte può il numero per quattro, e per il presente trova che basta una sola divisione e ne trae il quoziente 10375. Avanti di rintracciare questi quadrati cerca se il quesito è possibile, e sottomette il quoziente alla formola che esige i quattro quadrati. Per tal modo instituisce l' Equazione $2^3n-1=10375$ ovvero $2^3n=10376$. Ma poichè 10376, è divisibile per otto, cade questo numero sotto la necessaria spezzatura dei quattro quadrati, e non può perciò il proposto numero de' soldati essere diviso in tre battaglioni quadrati.

Un altro Generale che ha 35000 uomini sotto il suo comando

do fa la stessa interrogazione, per le tre falangi al suo ingegnere, e questi riflettendo, che tal numero di soldati diviso per otto lascia un quoziente dispari, equivalendo esso a 4.2.4375, poichè 4 è quadrato, e il numero 2.4375 è pari-dispari conosce subito essere possibili i tre richiesti Battaglioni quadrati, le fronti dei quali devono essere, due un numero pari-dispari, e la terza un numero pari-pari. Si mette poi a cercare in quante maniere si possa spezzare il numero 2.4375, in tre quadrati; ed avendo sotto gli occhj la serie de' quadrati dei numeri naturali che si trovano registrati in più libri d'aritmetica, e d'algebra, va a cercare il massimo quadrato dispari, prossimamente minore a questo numero; sottrae da esso tal quadrato, e cerca se il residuo si possa spezzare in due, un dispari, ed un pari. Caso che no prende in mano l'altro quadrato dispari prossimamente minore del primo, ripete la stessa operazione, e la stessa indagine andando avanti sin che il residuo della sottrazione diventa maggiore della metà del numero 2.4375; e quando in tutti questi residui ritrovati si verifichi la condizione, che siano uguali alla somma di altri due quadrati, può notare tutte le diverse spezzature. Ma poichè i quadrati massimi potrebbero anche esser pari, assunto quel quadrato pari che è prossimamente minore del numero 2.4375, cerca il residuo ed esamina se questo sia divisibile in due quadrati dispari, che gli darebbero la prima combinazione. In caso contrario coi quadrati pari prossimamente minori l'uno all'altro, va tentando, e notando i felici esiti sin che arriva a un residuo maggiore della unità del numero di cui cerca la spezzatura in tre quadrati, e la sua indagine resta espleta. Nel caso nostro tra le spezzature opportune, troverebbe anche le seguenti, nelle quali non facciam che indicare il numero de' soldati che devono essere posti alla fronte di questi Battaglioni, cioè non notiamo che le radici di questi quadrati.

186 . 178 . 166 . 150 . 158 . 134 . 130 . ec.
20 . 54 . 62 . 50 . 6 . 130 . 90 .
2 . 20 . 60 . 100 . 100 . 12 . 100 .

Esaurita questa Teoria dei numeri intieri, e fatto vedere non

non v' essere alcun numero, che non essendo di per se quadrato non possa spezzarsi o in due, o in tre, o in quattro quadrati, non sarà molto difficile la soluzione di questo problema.

Dato qualunque numero, ritrovare un quadrato, che moltiplicato per quel numero faccia un prodotto uguale a qual si voglia numero di quadrati. La soluzione di questo problema non è sempre possibile, e farem vedere quali sono le condizioni del dato numero, che ne rendono possibile la soluzione.

Alla soluzione di questo problema generale ci faranno strada i problemi subalterni, e più semplici, il primo de' quali è il seguente: dato un numero, trovare un quadrato, che moltiplicato per quel numero, formi un prodotto eguale a due quadrati. Cercheremo innanzi a tutto quale condizione è necessario che si verifichi in tal prodotto, affinchè rendasi possibile il problema. Suppongo, con tutta la generalità, espresse così le radici de' due ricercati quadrati; la prima, $mp + nq$; e la seconda $mq - np$; nelle quali dando gli opportuni valori, ai quattro simboli m, n, p, q, potrò sempre avere due qualunque numeri intieri, un maggiore, e l' altro minore, essendo anche intieri i simboli componenti le suddette formole. Considerate queste come radici dei due quadrati, uguali a un dato numero, la somma di questi due quadrati ci dà il risultato $\overline{m^2+n^2} \cdot \overline{p^2+q^2}$, il quale mostra la forma che deve avere questo numero affinchè sia possibile la sua spezzatura in due quadrati. Deve perciò tal numero, essere divisibile in due fattori ciascun de' quali possa essere spezzato in due quadrati. Ma siccome anche il zero può entrare nel numero di questi quadrati, fatto per esempio $q = 0$, il risultato si cangia in $\overline{m^2+n^2} \cdot p^2$ che dà effettivamente due quadrati. Laonde per il primo problema proposto, di trovare, dato un numero, un quadrato che moltiplicato per il numero equivalga alla somma di due quadrati, potendo rappresentare con $p^2 + q^2$ il quadrato richiesto, e con $m^2 + n^2$ il dato numero, si rende necessario fuor del caso di $q = 0$, che il quadrato che si cerca possa essere spezzabile in due quadrati, e così fuor del caso di $n = 0$ è pur necessario che anche il numero proposto possa spezzarsi in due quadrati.

La conseguenza di questo discorso è che trovandosi nella serie dei quadrati alcuni di essi spezzabili in due quadrati, e molti altri non spezzabili che in tre, per esempio $p^2+q^2+r^2$, avremo bensì i due quadrati ricercati dal problema, sostituendo invece dei tre $p^2+q^2+r^2$ l' unico quadrato a cui essi sono uguali; ma non potremo aver nuove coppie di quadrati, ove si voglia fare entrare in essi i simboli p, q, r. Al contrario poi se il quadrato ricercato può essere spezzabile in altri due come p^2+q^2, non solo abbiamo i due quadrati dell' eguaglianza, quando si sostituisce in vece di p^2+q^2 il quadrato unico che loro è uguale, ma ci nascono altri quadrati, che traggono la loro origine da p e da q, che son le radici dei primi. Poichè m^2+n^2 vien da noi considerato come il dato numero, si fa evidente, che se questo non fosse spezzabile che in tre quadrati, e non in due, il problema sarebbe impossibile. Egli è dunque necessario per questo nostro problema che il dato numero o sia quadrato, o spezzabile in due quadrati. Sarà qulche volta facile il conoscere a un tratto che il dato numero è divisibile per 3, o per 7 o per 11, che si sa non esser numeri spezzabili in due quadrati, onde in tal caso se il numero è di molte figure, siam liberati dalla pena del fastidioso metodo di cercare i quadrati prossimi, e possiam decidere sul momento l' impossibilità del problema.

Ciò premesso il problema de' due quadrati, chiamato K il numero dato, si presenta algebraicamente con questa forma, $Kn^2=p^2+q^2$, nella quale sono incogniti i simboli, n, p, q; e perchè K deve ammettere la sua spezzatura in due quadrati, chiameremo questi due quadrati noti, a^2, b^2, e sarà cangiata la formola in quest' altra $a^2n^2+b^2n^2=p^2+q^2$ che disporremo pure in quest' altro modo, $a^2n^2-q^2=p^2-b^2n^2$. L' artifizio semplice di cui mi valgo, per la soluzione di questo problema, insieme con altri che verranno consecutivamente, consiste nel ridurre a rettangoli i binomj che sono in ambi i membri, introducendo de' nuovi simboli arbitrarj per la riduzione di tali membri ad eguali rettangoli. Esprimiamo pertanto il primo membro

a^2n^2

$a^2n^2 - q^2$ in quest' altra maniera equivalente $\left(\frac{an-q}{g}\right)\overline{gan+gq}$; ed espresso similmente l' altro membro con $\left(\frac{p-bn}{f}\right)\overline{fp-fbn}$, si ha l' Equazione $\left(\frac{an-q}{g}\right).\overline{gan+gq} = \left(\frac{p-bn}{f}\right)\overline{fp-fbn}$, nella quale considerate come basi dei due rettangoli le espressioni $\frac{an-q}{g}$, $\frac{p-bn}{f}$ e come lati le rimanenti, si devono instituire due altre equazioni, la prima che nasce dal fare uguali le basi, la seconda dal fare i lati uguali. Col mezzo della prima troviamo $p = \frac{fan+gbn-fq}{g}$, che fa essere il lato $fp + fbn = \frac{b^2an-2fgbn-f^2q}{g}$ e facendo questo lato uguale a quello del rettangolo, nel secondo membro ci si presenta l' equazione $\frac{f^2an+2fgbn-f^2q}{g} = gan + gq$ ossia $f^2an + 2fgbn - f^2q = g^2an + g^2q$ che portando i termini del q da una parte e quelli dell' n dall' altra diventa $(f^2a+2fgb - g^2a)n = (g^2 + b^2)q$. Essendo questa equazione di per se indeterminata, per ragion delle due variabili n, q, sarebbe in arbitrio del geometra, il dare a uno di questi simboli quel valore che più piacesse, rimanendo anche arbitrarj gli altri simboli f, g. Con ciò avrebbersi, generalmente parlando, dei quadrati frazionarj, che scioglierebbero il problema; ma siccome noi ci proponiamo dei numeri interi, li avremo sempre se faremo q ugnale al coefficiente di n, e n uguale al coefficiente di q, purchè ad a, f, g, non si dian che valori di numeri interi. Per tal modo ci risulta $n = f^2+g^2$, $q = f^2a + 2fgb - g^2a = (f^2 - g^2)a + 2fgb$, e sostituendo questi valori nel valore di p nasce $p = (g^2 - f^2)b + 2fga$. Rifletteremo quì, che il primo membro dell' equazione $Kn^2 = p^2 + q^2$, dopo il trovato valore di n, diventando equivalentemente $(a^2+b^2) \cdot (f^2+g^2)^2$, abbiamo infinite coppie di quadrati, se diamo ai simboli f, g, qualunque valore di numero intero, e oltre questi anche gli altri infiniti

quadrati, che vengono formati, colle radici espresse dai valori di p, q sopra trovati; e oltrecciò, dal calcolo che abbiamo fatto risulta, che per avere questi ultimi infiniti quadrati, la radice n del primo vuol essere posta eguale alla somma di due quadrati. Noterem finalmente che se il dato numero K non riceve altra spezzatura che quella di tre quadrati come se fosse $a^2 + b^2 + c^2$, il Problema riesce impossibile, e che è necessario o che K sia per se quadrato, o almeno spezzabile in due quadrati: e nella supposizione che K sia quadrato, come a^2, potremo nelle nostre formole far $b=0$, ed esse si cangieranno nelle seguenti $n=f^2+g^2$, $p = 2fga$, $q = (f^2 - g^2)\,a$, dove fatto anche $a = 1$ risultano le stesse formole che si trovano in quasi tutti i libri elementari di algebra, sulla proprietà che devono avere tre numeri, affinchè il quadrato d' un d' essi uguagli quello degli altri due, proprietà, che nella linea, appartiene al triangolo rettangolo.

L' ordine naturale nella serie de' problemi simili al precedente, ci porta alla proposizione di quest' altro; Dato un numero, trovare un quadrato, che moltiplicato per quel numero sia uguale a tre quadrati; il qual problema algebraicamente presentato, somministra l' Equazione $Kn^2 = p^2 + q^2 + r^2$; essendo K il dato numero. Ora o esso numero K è pari-pari, o pari-dispari, o dispari. Se è pari-pari, qualunque sia il quadrato moltiplicatore, non potrà il prodotto essere uguale, che a tre quadrati pari; in conseguenza, potran sempre dividersi i termini dell' Equazione per quattro, e questa divisione andrà tante volte replicata, quante volte i quozienti di K diviso per 4, 16, 64, ec. sian pari-pari; finalmente ci ridurremo per necessità, o a un ultimo quoziente pari-dispari, o a un ultimo quoziente dispari. Così il quadrato moltiplicator di K, non può essere che un numero pari-pari, o un dispari; e nel caso del pari-pari, torna in campo lo stesso discorso, che non può essere il mentovato prodotto, se non che uguale a tre quadrati pari. Dal che risulta, che il nostro problema si riduce a uno di questi due; dato un numero K pari dispari, trovare un quadrato dispari che moltiplicato per esso numero, dia un prodotto uguale a tre quadrati; o sia a

quest'

quest' altro; dato un numero dispari, trovare un quadrato dispari, che moltiplicato per tal numero dia un prodotto uguale a tre quadrati. Considero quest' ultimo caso, e mi accingo a dimostrare che se il dato numero K non è spezzabile nè in due, nè in tre quadrati, ma soltanto in quattro, il problema è impossibile. Abbiamo sopra fatto vedere che fuor dei numeri compresi sotto la formola 2^3n-1, i quali soli non son spezzabili nè in due, nè in tre quadrati, tutti gli altri dispari lo sono; ecco pertanto, la dimostrazione della impossibilità del problema, nel caso che K sia un di quei numeri, compresi dalla formola 2^3n-1. La espressione algebraica del problema è $Ku^2=p^2+q^2+r^2$; e poichè, sì K che n essendo numeri dispari, i quadrati p^2, q^2, r^2 non possono essere, che o tre dispari, o un dispari, e due pari fatto generalmente $K=2^3s-1$, $n=2m-1$, $p=2t-1$, $q=2u-1$, $r=2y-1$, l'Equazione diviene $2^5m^2s-2^5ms+2^3s-2^2m^2+2^2m-1=2^2t^2-2^2t+1+2^2u^2-2^2u+1+2^2y^2-2^2y+1$; e portate le tre unità di questo nell' altro membro nasce $2^5m^2s-2^5ms+2^3s-2^2m^2+2^2m-4=4t^2-4t+4u^2-4u+4y^2-4y$, e divisa l' Equazione per quattro, $2^3m^2s-2^3ms+2.s-m^2+m-1=t^2-t+u^2-u+y^2-y$; ma il primo membro è necessariamente un numero dispari, perchè i tre termini primi son moltiplicati per 2, i due avanti l'ultimo sono necessariamente un numero pari, anche quando m si supponga dispari. e l' ultimo cioè l' unità è un dispari, mentre nell' altro membro ogni coppia t^2-t, u^2-u, y^2-y non può essere che un numero pari. Dunque è impossibile, che il suddetto sia uguale a tre quadrati dispari. Non può nemmen essere uguale a un quadrato dispari, e due pari; imperciocchè, fatto $p=2t-1$ per il dispari, e $q=2u$, $r=2y$ per i due pari, l' Equazione diventa $2^5m^2s-2^5ms+2^3s-2^2m^2+2^2m-1=4t^2-4t+1+4u^2+4y^2$, e trasferita l' unità di quest' ultimo membro nel primo, abbiamo $2^5m^2s-2^5ms+2^3s-2^2m^2+2^2m-2=4t^2-4t+4u^2+4y^2$, ove si vede che il primo membro è necessariamente un numero pari-dispari mentre l' altro è un numero pari-pari; e con ciò resta univer-

sal-

salmente dimostrata la impossibilità del problema, quando K sia un numero compreso dalla formola 2^3n-1.

Il caso del dato numero K pari-dispari, vien compreso nel problema di un numero K spezzabile, o in due, o in tre quadrati, perchè tutti i numeri pari-dispari, ammettono questa spezzatura, come abbiamo altrove veduto.

Dopo aver dimostrato essere impossibile la soluzione del problema espresso colla formola $Kn^2=p^2+q^2+r^2$, ove K non possa essere spezzato che in quattro quadrati, come avviene a tutti i numeri compresi nella formola $2^{2u-2}(2^3n-1)$, porremo in generale la seguente formola che il rende possibile, $(a^2+b^2+c^2)n^2=p^2+q^2+r^2$. Lasciando la differenza di due quadrati nel primo membro, e collocate le altre differenze di altri due quadrati nel secondo, seguendo un ordine simile per le traslazioni di tai quadrati, a quello da noi praticato nel precedente problema, daremo alla formola questo nuovo aspetto; $a^2n^2-r^2=q^2-b^2n^2+p^2-c^2n^2$, o ridotte queste differenze a rettangoli $(an-r)(an+r)=(q-bn)(q+bn)+(p-cn)(p+cn)$; i quai rettangoli, all' introduzione dei simboli arbitrarj, equivalgono ai seguenti; $\frac{(an-r)}{h}(han+hr)=\frac{(g-bn)}{f}(fq+fbn)+\frac{(p-cn)}{g}(gp+gcn)$. Quì pure, come nell' altro problema, prese per basi le parti frazionarie di questi rettangoli, le faremo tra loro uguali, confrontando l' una e l' altra base del secondo membro, coll' unica base del primo. Con ciò, principiando il confronto colla prima base del secondo membro, abbiam l' Equazione $\frac{g-bn}{f}=\frac{an-r}{h}$, onde nasce $g=\frac{fan+hbn+fr}{h}$; e colla sostituzione del valore di g nell' espressione del lato corrispondente alla base assunta nel secondo membro, ci risulta $fg+fbn=\frac{f^2an-f^2r+2fhbn}{h}$ (1°). Il confronto della rimanente base colla prima, ci dà quest' altra Equazione, $\frac{p-cn}{g}=\frac{an-r}{h}$, onde si trae $p=\frac{gan+hcn-gr}{h}$, e coll' uso di tal valore nella formola $gp+gcn$, ci nasce il lato del secondo ret-

rettangolo uguale $\frac{g^2an-g^2r+2ghcn}{h}$ (2°). Ora perchè valga l'Equazione che fa essere un rettangolo uguale alla somma di due, poichè in tutti essi le basi sono uguali, fa d' uopo che la somma dei lati dei due rettangoli del secondo membro, sia uguale all' unico lato, del rettangolo del primo; unite pertanto le due espressioni (1°), (2°), risulta la nuova equazione $f^2an - f^2r + 2fhbn + g^2an - g^2r + 2ghcn = h^2an + h^2r$ ovvero $(f^2+g^2-h^2)an + 2fhbn + 2ghcn = (h^2+g^2+h^2)r$. Non cercando noi per il nostro problema che i numeri interi, faremo uguale a n, il coefficiente di r, ed uguale a r il coefficiente di n; e con ciò avremo $n = b^2 + g^2 + h^2$; $r = (f^2+g^2+h^2)a + 2fhb + 2ghc$; e finalmente colle sostituzioni di tai valori in quelli di q, e di p sarà $q = (-f^2+g^2+h^2)b + 2fha - 2fgc$; $p = (f^2-g^2+h^2)c + 2ghb - 2fgb$. Se K non fosse spezzabile che in due quadrati, basta far zero un dei tre simboli, a, b, c, e abbiamo i valori modificati a questa ipotesi. Se il numero dato K oltre essere spezzabile o in due o in tre quadrati è anch' esso quadrato, si potranno annullar due quadrati della generale espressione, come b^2, c^2, e le formole soffriranno quel cangiamento che spetta a tale ipotesi. Finalmente, se si vuol sciolto il problema, trovare un quadrato uguale a tre quadrati; fatto b, c uguale a zero, e $a = 1$, avremo $n = f^2 + g^2 + h^2$; $p = 2gh$, $q = 2fh$ $r = f^2 + g^2 - h^2$, e dati ai simboli f, g, h, tutti i valori interi possibili, dei numeri naturali, avremo infiniti quadrati n^2 che saranno uguali a tre quadrati.

La soluzione di questo problema, dandoci $n = f^2+g^2+h^2$, inchiude la condizione, che la radice n del quadrato cercato debba essere uguale a tre numeri quadrati; il che potrebbe far credere, che fosse impossibile la sua soluzione in tutti quei quadrati n^2 che hanno per radice un numero non spezzabile che in quattro quadrati, mentre qualunque sia il quadrato n^2, nato da tali numeri, sempre il problema è solubile. Imperciocchè tutti i numeri non spezzabili che in quattro quadrati restando compresi nella formola $2^{2f-2}(2^3n - 1)$, ommettendo il quadrato moltiplicatore 2^{2f-2}

2^{2f-2}, e considerando solo i dispari espressi da 2^3n-1, prendiamo il doppio di questi numeri, che ci viene somministrato dalla formola 2^4n-2, la quale come si è notato superiormente, non contiene che numeri spezzabili in tre quadrati, due dispari, e un pari. Ora se daremo ai tre simboli arbitrarj f, g, h del nostro problema dei tre quadrati i valori di due quadrati dispari e un pari, spezzeremo il quadrato del doppio del numero che non può essere spezzato che in quattro quadrati in tre soli quadrati, e tutti pari. Dunque divisi per quattro tutti questi quadrati, avremo anche i tre quadrati uguali al quadrato, la cui radice non si spezza che in quattro quadrati. Per esempio nella formola generale dei tre quadrati, fatto $f=3$, $g=2$, $h=1$, diventa $n=14$, che è il doppio del numero 7 non spezzabile che in quattro quadrati. Sostituiti questi valori nelle nostre formole, abbiamo $n=14, p=6c+4a-12b$; $q=-4b+6a-12c$; $r=12a+6b+4c$; e prese le metà di tutte queste radici avremo $n=7, p=3c+2a-6b$; $q=-2b+3a-6c$; $r=6a+3b+2c$; e conseguentemente sarà $(a^2+b^2+c^2)49$ uguale ai tre quadrati che nascono dai valori di p, q, r; e lo stesso avverrà se faremo in generale due dei numef, g, h dispari, e l'altro pari; prendendo questi numeri dispari nelle radici di quei quadrati nei quali si spezzano i numeri della formola 2^4n-2, e lo stesso dicendo della radice corrispondente del quadrato pari. Tre classi pertanto di quadrati abbiamo che ci danno sciolto il problema dei tre quadrati. La prima rende possibile la soluzione qualunque sia il quadrato n^2, perchè $a^2n^2+b^2n^2+c^2n^2$ costituiscono tre quadrati, e per questa non può essere zero alcun dei simboli a, b, c; la seconda ci vien data dalle nostre formole, per tutti quei quadrati n^2 la cui radice n è spezzabile in tre quadrati potendo essere uguale a zero, o uno, o anche due dei simboli a, b, c. La terza classe poi, pur data dalle nostre formole, è quella di quei tre quadrati pari che risultano uguali $(a^2+b^2+c^2)n^2$; i quali divisi per quattro fanno essere la radice n spezzabile solamente in quattro quadrati.

Poichè si è stabilito che qualunque numero intiero è spez-

za-

zabile al più in quattro quadrati, qualunque sia il numero dato K non vi sarà alcun caso in cui si renda impossibile la soluzione di questo problema: Dato un numero K, trovare un quadrato che moltiplicato per quel numero, faccia un prodotto uguale a quattro quadrati. L'espressione analitica generale di questo problema è la seguente; $(a^2+b^2+c^2+d^2)\,n^2 = p^2+q^2+r^2+t^2$, nella quale, o uno, o due, o tre di quei quattro quadrati dati, posson essere uguali a zero. Richiamando alla mente, lo stesso artifizio da noi adoperato ne' superiori problemi, trasformeremo, colla introduzione dei simboli arbitrarj, la nostra Equazione così; $\frac{(an-t)}{i}(ian+it) = \frac{(r-bn)}{f}(fr+fbn) + \frac{(q-cn)}{g}(gq+gcn) + \frac{(p-dn)}{h}(hp-hdn)$. Le parti frazionarie di questi prodotti siano le basi uguali dei quattro rettangoli, e le parti intere i loro lati. Ciascuna base del secondo membro si faccia uguale alla base del primo, e ci nascono le Equazioni $r = \frac{fan-ft+ibn}{i}$, $q = \frac{gan-gt+icn}{i}$; $p = \frac{han-ht+idn}{i}$; di quì nasce il lato appartenente al primo rettangolo del secondo membro uguale a $\frac{f^2an-f^2t+2fibn}{i}$; il lato appartenente a quello che gli tien dietro uguale $\frac{g^2an-g^2t+2gicn}{i}$; e il terzo lato del terzo rettangolo uguale $\frac{h^2an-h^2t+2hidn}{i}$. E dovendo essere la somma di questi tre lati, uguale al lato del rettangolo del primo membro $ian+it$, abbiamo l'Equazione $(f^2+g^2+h^2-i^2)an + 2in(fb+gc+hd) = (f^2+g^2+h^2+i^2)t$. Quindi fatto il coefficiente di t uguale ad n, e il coefficiente di n uguale a t, abbiamo $n = b^2+g^2+h^2+i^2$; $t = (f^2+g^2+h^2-i^2)a+2i(fb+gc-hd)$; e colla sostituzione di tai valori in quello, dei rimanenti simboli r, q, p, si ottiene $r = (g^2+h^2+i^2-f^2)b+2f(ia-gc-hd)$; $q = (f^2+h^2+i^2-g^2)c+2g(ia-fb-hd)$; $p = (f^2+g^2+i^2-h^2)d+2h(ia-fb-gc)$.

Se il numero dato K è solo spezzabile in tre quadrati, ba-

sterà annullare uno dei simboli a, b, c, d, nelle nostre formole; due se K non è spezzabile che in due quadrati, e finalmente tre se esso è un quadrato. Supposti pertanto b, c, d, uguali a zero, e $a=1$, resta sciolto il problema di trovare un quadrato uguale a quattro quadrati; e diventa $n=f^2+g^2+h^2+i^2$; $p=2hi$; $q=2gi$; $r=2fi$; $t=f^2+g^2+h^2-i^2$.

Venendo in questo problema il simbolo n, espresso con quattro quadrati, non si dee credere, che i quadrati i quali hanno la radice componibile, o con due, o con tre soli quadrati, non possano mai rappresentare il nostro simbolo n, e rendano, in conseguenza, quei numeri fuori delle nostre formole, perchè tra i valori arbitrarj che dar si potranno ai quattro simboli f, g, h, i, vi saran sempre quelli che costituiscono il doppio del valore di n, che supponesi non spezzabile in quattro quadrati. In tal maniera, con tale determinazione di valori si avranno quattro quadrati pari uguali al quadrato del doppio di quella radice, e conseguentemente divisi tutti questi quadrati per quattro, si avranno anche i quattro quadrati che corrispondono a quello di n non spezzabile, che in due, o in tre quadrati, e qualche volta quando il permettano i valori, e il numero de' noti simboli a, b, c, d, coll' annullamento di alcuno dei simboli arbitrarj f, g, h, i, si potranno presentare i quattro quadrati, non ostante che la radice n non accetti la spezzatura di quattro quadrati.

Posto che le nostre formole per i quattro quadrati sono state disposte in modo, da rendere con poca riflessione conoscibile la legge, che dee valere per gli ulteriori problemi, simili ai precedenti nei quali si domandassero prodotti di quadrati in dato numero uguali a cinque, sei, o qualunque numero di quadrati credo opportuno di notar quì le superiori formole per i due e i tre quadrati, con un ordine analogo a quello, che per i quattro abbiam sopra osservato.

Per il problema dei due quadrati espresso coll' equazione; $(a^2+b^2)n^2=p^2+q^2$, si è trovato; $n=f^2+g^2$; $q=(f^2-g^2)a+2fgb$; $p=(g^2-f^2)b+2fga$.

Or-

Ordinate in simil maniera le formole del problema dei tre quadrati, abbiamo $n=f^2+g^2+h^2$; $r=(f^2+g^2-h^2)a+2h(fb+gc)$; $q=(g^2+h^2-f^2)b+2f(ha-gc)$; $p=(f^2+h^2-g^2)c+2g(ha-fb)$.

Se si considera l' andamento delle formole, per i nostri tre problemi si vede che il valore di n è sempre uguale alla somma del numero de' quadrati proposti dal problema. Rapporto agli altri simboli convien distinguere, dagli altri, quello che unicamente si trasporta dal secondo membro al primo dell' Equazione, che per noi è sempre l'ultimo nell' ordine alfabetico n, p, q, r, t ec. Il valore di quest' ultimo trasportato ha per primo termine il numero stesso dei quadrati che ha n; ma rendendosi negativo il quadrato del simbolo arbitrario, che compete alla base del rettangolo unico che è nel primo membro dell' Equazione, e questo aggregato di quadrati resta moltiplicato in a; onde per il problema dei due quadrati, essendo q l' ultimo simbolo cui compete il simbolo arbitrario g, sarà il primo termine del valore di q, $(f^2-g^2)a$. Per il problema dei tre quadrati, l' ultimo simbolo in ordine essendo r, cui compete l' arbitrario h, sarà il primo termine del valore di r uguale $(f^2+g^2-h^2)a$; e per l'altro dei quattro quadrati dove t è l'ultimo termine cui spetta l'arbitrario simbolo i, sarà questo primo termine del valore di t uguale, $(f^2+g^2+h^2-i^2)a$. Il secondo termine poi del valore dell' unico trasportato nel primo membro è sempre uguale al doppio del suo simbolo arbitrario, corrispondente, moltiplicato nella somma dei prodotti del penultimo nel suo simbolo, dell' antipenultimo nel suo fino al totale esaurimento dei simboli che sono nel secondo membro. Il perchè nel problema dei due quadrati, il secondo termine del valore di q sarà $2g.fb$. In quello dei tre quadrati, il secondo termine del valore di r sarà $2h(fb+gc)$; e in quello dei quattro quadrati, il secondo termine del valore di t sarà $2i(fb+gc+hd)$.

Passando ora al valore di quei simboli, che non sono stati trasportati nel primo membro, cominciando dal penultimo, il suo valore sarà sempre composto di due termini, il primo de' quali sarà l' aggregato dei quadrati ai quali è uguale n, colla differen-

za, che sia negativo, il quadrato del simbolo competente, a questo penultimo termine, che è sempre f^2 moltiplicandosi poi questo aggregato in b; il secondo termine poi di questo simbolo penultimo, sarà il prodotto di $2f$, nella differenza del prodotto di a nel suo simbolo competente, e la somma dei prodotti di b, c, ec. nei loro simboli corrispondenti, escluso sempre il prodotto fb. Così il valore dell' antipenultimo, cui compete c e il simbolo g, avrà per primo termine l' aggregato dei quadrati suddetti, dove sarà g^2 negativo, colla moltiplicazione di questo aggregato per c; e per secondo termine $2g$ moltiplicato nella differenza del prodotto di a nell' ultimo simbolo ad esso competente, e della somma degli altri prodotti consimili escluso il prodotto ge. Si osservi poi la stessa legge nei seguenti valori delle radici dei quadrati cercati, e sarà data per ciascun d'essi la conveniente espressione.

Non sarà pertanto difficile, al caso che si proponga, dato un numero, trovare un quadrato che moltiplicato per quel numero sia uguale a cinque quadrati, perchè la legge sopra mentovata, non ci abbandona qualunque sia il numero dei quadrati cercati.

Risolvendo con tutta la generalità questo problema, e fatto K uguale a cinque quadrati dati, avremo la seguente Equazione $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)n^2=p^2+q^2+r^2+t^2+u^2$, e i simboli arbitrarj essendo f, g, h, i, l, assegneremo quest' ultimo simbolo l, all' ultimo simbolo u, che resta trasportato nel primo membro, mantenendo, gl' istessi simboli f, g, h, i, agli altri, b, c, d, e competenti, come porta l' ordine osservato, nei precedenti problemi. Per tal modo, l' analogia, che ci somministrano le espressioni dei problemi superiori, ci serve di guida, per presentare con giustezza i valori de' simboli per questo nuovo problema de' cinque quadrati. Sarà dunque

$n=f^2+g^2+h^2+i^2+l^2$; $u=(f^2+g^2+h^2+i^2-l^2)a+2l(fb+gc+hd+ie)$;

$t=(g^2+h^2+i^2+l^2-f^2)b+2f(la-gc-hd-ie)$;

$r=(f^2+h^2+i^2+l^2-g^2)c+2g(la-fb-hd-ie)$;

$q=(f^2+g^2+i^2+l^2-h^2)d+2h(la-fb-gc-ie)$;

$p=(f^2+g^2+h^2+l^2-i^2)e+2i(la-fb-gc-hd)$.

Que-

Questo problema dei cinque quadrati ci somministra maggior numero di soluzioni dei precedenti, p rchè, sebbene qualunqu e numero può spezzarsi, compresi i zero, in quattro quadrati, non tutti si spezzano in quattro quadrati effettivi e non molti di quelli, che si possono spezzare in quattro, non ammettono la spezzatura in cinque quadrati. La prima classe pertanto delle soluzioni, ci vien data da quei numeri K che sono uguali a cinque quadrati, e qualunque sia il quadrato n^2 resta sciolto il problema. La seconda classe di soluzioni, si ha dalle nostre formole quando il numero K sia uguale a cinque quadrati, e poichè, molti numeri spezzabili in cinque quadrati possono ricevere anche la spezzatura in quattro; coll' annullamento di uno di quei cinque quadrati e colla equivalenza del numero dei quattro a quello dei cinque, si otterrà una nuova classe di soluzioni, e così se il valore dei cinque fosse uguale al valore di tre o di due, per tutti questi casi, le formole assumendo quelle modificazioni che loro competono, in grazia di tali ipotesi, ci daranno altre serie di soluzione.

Il valore di n ci viene presentato dalle nostre formole, con cinque quadrati; ma siccome, non v' è numero che non possa essere presentato con numero di quadrati minore, così non potrà nascer dubbio, sulla verità delle formole, e sulla possibilità del problema dei cinque quadrati, quando a f, g, h, i ec. si diano quei valori arbitrarj che più piace, e che non diminuiscono il numero dei quadrati ricercati.

E-sendo lucida la legge colla quale procedono le nostre formole sarà in mano di qualunque algebrista, l' assegnare quelle che appartengono ai problemi dei sei, sette, ec. quadrati; onde potrem concludere, che da noi sia stato sciolto il problema generale, posto sino al principio; Dato un numero, trovare un quadrato, che moltiplicato per quel numero, sia uguale alla somma di qualsivoglia numero di quadrati.

OS-

OSSERVAZIONE

DELL' ECCLISSE LUNARE

Degli 11 *Luglio* 1805

Dell' Abate Vincenzo Chiminello

Con Tubo Acromatico Dollondiano di piedi 5 circa.

Ricevuta il dì 20 *Luglio* 1805.

La penombra distinta tocca la Luna a circa	7h	49'	38" t. v.
L' ombra verso a Primaldo		53	50
Primaldo coperto tutto		54	37
L' ombra a Gassendo		56	25
Gassendo coperto		57	5
Penombra ad Aristarco, stimata		58	36
al Mare degli Umori, stimata		59	8
Ombra vera ad Aristarco	8	2	8
al Mare degli Umori		5	35
Mare degli Umori coperto		6	29
Aristarco		8	9
L' Ombra a Copernico		15	4
Copernico coperto		17	30
L' ombra a Ticone		18	45
Ticone coperto		20	16
L' ombra ad Archimede		24	11
Archimede coperto		25	48
L' ombra a Manilio		32	57
a Platone		34	6
al Mare della Serenità		35	15
Manilio coperto		35	35

Pla-

Platone	8h	36'	0"	t. v.
L' ombra a S. Dionigi Areopagita al Mare della Tranquillità		36	41	
S Dionigi coperto		37	56	
L'ombra al Mare del Nettare, dubbia,		39	46	
ad Endosso		42	44	
ad Aristotile		43	26	
Endosso coperto		4	46	
Aristotile		44	50	
L' ombra al Mare della Fecondità		47	53	
a Petavio		50	26	
Petavio coperto		51	53	
Il mare della Tranquillità		52	54	
L' ombra a Langreno		53	48	
al Mare delle Crisi		55	17	
Langreno coperto		55	19	
Il mare delle Crisi		58	20	
Immersione totale della Luna	9	1	57	
Immersione di una stelletta di Capricor.	9	32	31,87	oss. buona

Dell' Emersione poche osservazioni, e dubbie per le nubi sempre intercorrenti davanti la Luna.

Un principio d' Immersione	10h	31'	35"	t. v.
Vero principio		32	43	
Grimaldo comincia ad emergersi		41	11	
Aristarco già emerso		41	48	
Nubi densissime		—	—	
Ticone comincia	11	7	31	
Manilio emerso		10	57	
Il Mare della Serenità		18	41	
Totale Emersione prossima		38	35	
Totale Emersione compita, dubbia		41	35	

Era meco il Sig Ab. Pertirossi Busata Marosticense, giovane di molto ingegno e studioso, applicato all' Astronomia con

con profitto nella Teorica, e nella Pratica, e in tempo della massima oscurità abbiamo osservato d' accordo , se qualche indizio di Vulcano appariva sul disco Lunare , e ci parve di averne scorto due segni sopra il centro alla parte orientale , ma la troppa estensione di quel lume, che si scorgeva , ci fece tosto dubitare, e confrontando la figura selenografica , colle posizioni marcate a stima siamoci accorti , che l' uno di quei chiari era la macchia d' Aristarco , l' altro o il monte Elicona, o piuttosto il seno dell' Iridi . In fatti la Luna essendo apogea, com' era visibile ancora tutta ad occhio nudo per li raggi rifratti dall' atmosfera, e più sparsi nella parte superiore del cono ombroso , così col telescopio se ne dovevano discernere certi luoghi eminenti, e più capaci di riflettere quel languido lume . Il caso di scoprire bene dei Vulcani sarebbe in Ecclisse di Luna perigea , non potendo allora i detti raggi penetrare sino al mezzo dell' ombra , e però la Luna perdendosi quasi affatto di vista , come nell' Ecclissi 15 Giugno 1620 ; 25 Aprile 1642; 10 Settembre 1783 .

RI-

RIFLESSIONI

Di Paolo Ruffini

INTORNO AL METODO PROPOSTO DAL CONSOCIO *MALFATTI* PER LA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI 5° GRADO

Ricevute il dì 21 *Settembre* 1805.

L'immortale Consocio Lodovico Lagrange nella seconda delle sublimi Memorie (Reflex. sur la Résolut. des Equat.) esistenti negli Atti dell'Accademia di Berlino per gli anni 1770, 1771, analizzando (Sect. 3) i metodi generali, che fino a quell' epoca erano stati proposti, onde tentare la soluzione di tutte le Equazioni algebraiche, esamina da prima il metodo, che il Sig. Tschirnaus espose negli Atti di Lipsia per l'anno 1685, e l'altro poscia, che pubblicarono il Sig. Eulero nel Tomo 9° dei Nuovi Commentarj di Pietroburgo, ed il Sig. Bezout negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1765. Ritrovato, che entrambi questi metodi applicati ad un' Equazione generale di 5° grado la trasformano in un' altra del grado 24°, il Sig. Lagrange col mezzo in seguito delle profonde sue osservazioni scuopre essere tal trasformata riducibile ad un'altra di grado 6° (n.° 74, Reflex. ec.), e di quest' ultima determina Egli attualmente il solo coefficiente del 2° termine.

Nell' anno medesimo, in cui il Sig. Lagrange presentò all' Accademia di Berlino la seconda delle citate Memorie, il Chiarissimo Sig. Malfatti pubblicò nel T°. 4° dell' Accademia di Siena il suo metodo generale, onde sciogliere le Equazioni. Questo nella prima supposizione fondamentale non differisce, per vero dire, dal metodo de' Sigg. Eulero, e Bezout; rapporto però all' Equazione di 5° grado lo supera di gran lunga nell' ulteriore svi-

luppo, e nei calcoli ulteriori. Col mezzo di questi l'indicata Equazione di 5° grado riducesi attualmente ad una trasformata di grado 6° (n.° XIV Mem. Malfatti T. 4° Accademia di Siena), e l'illustre Autore ha così il vanto di avere, senza punto conoscere le corrispondenti osservazioni di Lagrange, ottenuta completamente una trasformazione, rapporto alla quale l'immortale Matematico di Turine non aveva infine determinato che il grado, ed un solo coefficiente.

Ora l'Egregio Socio Malfatti nel promuovere i suoi dubbj sopra la insolubilità della Equazione generale di 5° grado (Tom. XI. di questa Società), espone nuovamente tale suo metodo. Dopo adunque di avere risposto ai dubbj medesimi, sembrata è a me cosa conveniente l'istituire su di tal metodo applicato alla Equazione generale di grado 5° delle ricerche, come il Sig. Lagrange le ha istituite sopra i metodi de' Sigg. Tschirnaus, Eulero, e Bezout, e ciò principalmente, onde scuoprire *a priori*, il perchè la sovraesposta corrispondente trasformata risulti di 6° grado.

1. Denominate $x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}$ le cinque radici della Equazione generica

(I) $$x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0$$

del Sig. Malfatti (pag. 503 T.° XI. Soc. Ital.), poichè il primo membro di questa deve uguagliare il prodotto, che formasi dalla moltiplicazione fra loro delle quantità

$$x + fm + f^2p + f^3q + f^4n,$$
$$x + f^2m + f^4p + fq + f^3n,$$
$$x + f^3m + fp + f^4q + f^2n,$$
$$x + f^4m + f^3p + f^2q + fn,$$
$$x + m + p + q + n,$$

nelle quali la f esprime una delle radici immaginarie della unità, e le m, p, q, n sono quantità da determinarsi (pag. 503), avremo evidentemente

(II) $$x' = -(fm + f^2p + f^3q + f^4n),$$
$$x'' = -(f^2m + f^4p + fq + f^3n),$$
$$x''' = -(f^3m + fp + f^4q + f^2n),$$

x^{IV}.

$$x'^{v} = -(f^4m + f^3p + f^2q + fn);$$
$$x^{v} = -(m + p + q + n).$$

Sommo ora insieme queste Equazioni dopo avere moltiplicata la prima di esse per f^4, la seconda per f^3, la terza per f^2, e la quarta per f; poscia le sommo, dopo avere moltiplicata la prima per f^3, la seconda per f, la terza per f^4, e la quarta per f^2; le sommo in terzo luogo, avendole prima moltiplicate, la prima per f^2, la seconda per f^4, la terza per f, e la quarta per f^3; finalmente le sommo, avendo moltiplicata la prima per f, la seconda per f^2, per f^3 la terza, e per f^4 la quarta; e ciò fatto, avrannosi i risultati

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} m &= -(f^4x' + f^3x'' + f^2x''' + fx' + x^{v}) : 5, \\ p &= -(f^3x' + fx'' + f^4x''' + fx'^{v} + x^{v}) : 5, \\ q &= -(f^2x' + f^4x'' + fx''' + f^3x'^{v} + x^{v}) : 5, \\ n &= -(fx' + f^2x'' + f^3x''' + f^4x'^{v} + x^{v}) : 5. \end{aligned}$$

2. Osservando ora l'incognita m, veggo essere questa una funzione razionale delle x', x'', ec. x^{v}, la quale a cagione dei valori della f tra loro diversi, e della generalità della Equazione (I), cangia di valore, qualunque permutazione si faccia fra le stesse x', x'', ec. x'^{v}. Dunque l'Equazione, da cui essa dipende, sarà del grado $1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120°$.

Chiamata Z l'incognita di questa Equazione, poichè la m non è che uno dei valori della Z, sia $m = Z'$, ne verrà $Z' = -(f^4x' + f^3x' + f^2x''' + fx'^{v} + x^{v}) : 5$ e quindi moltiplicando successivamente per f, f^2, f^3, f^4, avremo

$$\text{(IV)}\quad \begin{aligned} Z' &= -(f^4x' + f^3x'' + f^2x''' + fx'^{v} + x^{v}) : 5, \\ fZ' &= -(f^4x'' + f^3x''' + f^2x'^{v} + fx^{v} + x') : 5, \\ f^2Z' &= -(f^4x''' + f^3x'^{v} + f^2x^{v} + fx' + x'') : 5, \\ f^3Z' &= -(f^4x'^{v} + f^3x^{v} + f^2x' + fx'' + x''') : 5, \\ f^4Z' &= -(f^4x^{v} + f^3x' + f^2x'' + fx''' + x'^{v}) : 5. \end{aligned}$$

Ora la seconda di queste funzioni nasce dalla prima per quella permutazione semplice di r° genere, sotto cui la x' cangiasi nella x'', la x'' nella x''', la x''' nella x'^{v}, la x'^{v} nella x^{v}, e la x^{v} nella x', e le altre funzioni terza, quarta, e quinta nascono successivamente dalla prossima precedente per la permutazione medesima ripetuta. Dunque le quantità $Z', fZ', f^2Z', f^3Z', f^4Z'$ non

sono che tante radici della Equazione in Z, e però il suo primo membro sarà divisibile esattamente pel prodotto

$(Z - Z')\ (Z - fZ')\ \ldots\ (Z - f^4Z') = Z^5 - Z'^5$.

Chiamata Z'' un'altra qualunque delle radici della Equazione in Z diversa dalle (IV), e supposto per esempio $Z'' = -(f^4x'' + f^3x' + f^2x''' + fx'^v + x^v) : 5$, troveremo, come rapporto alla Z', che sono radici di tale Equazione ancora tutte le quantità Z'', fZ'', f^2Z'', f^3Z'', f^4Z'', e però che il suo primo membro è divisibile eziandio per $Z^5 - Z''^5$. Lo stesso si dice di tutte le altre funzioni, che sono radici della Equazione medesima. Dunque il suo primo membro uguaglierà il prodotto

$(Z^5 - Z'^5)\ (Z^5 - Z''^5)\ (Z^5 - Z'''^5)\ \ldots\ (Z^5 - Z^{xx'v5})$,

e per conseguenza, supposto $Z^5 = M$, essa si ridurrà alla Equazione del 24° grado

(V) $\qquad M^{24} + pM^{23} + qM^{22} + \text{ec.} = 0$.

Questa Equazione (V) altro non è che la trasformata che ottiensi col metodo de' Sigg. Eulero, e Bezout, ed essa è, nella quale si contengono tutti i 24 valori della M, che sono indicati nel (n.° 278 della mia Teor. delle Equ.). Siccome poi dalle (III) abbiamo

$$m = -(f^4x' + f^3x'' + f^2x''' + fx^{v} + x'^{v}) : 5,$$
(VI) $$p = -(f^4x''' + f^3x' + f^2x'^{v} + fx'' + x^{v}) : 5,$$
$$q = -(f^4x'' + f^3x'^{v} + f^2x' + fx''' + x^{v}) : 5,$$
$$n = -(f^4x'^{v} + f^3x''' + f^2x'' + fx' + x^{v}) : 5,$$

queste p, q, n non saranno, che tante funzioni, le quali provengono dalla m per certe permutazioni fra le x', x'', ec. x^v. Dunque saranno esse pure tante radici della precedente Equazione in Z, e le m^5, p^5, q^5, n^5 tante radici della precedente (V).

3. Moltiplichiamo la prima delle quantità (VI) con la quarta, e la seconda con la terza; ritenuta la maniera di scrivere supposta nei (n. 34, 39. 46, Teor. delle Equ.) otterremo quindi

$$mn = [\Sigma x^2 + (f + f^4)\ (x'x'' + x''x''' + x'''x'^v + x'^vx^v + x^vx') + (f^2 + f^3)\ (x'x''' + x'''x^v + x^vx'' + x'x'^v + x'^vx')] : 5^2$$
$$pq = [\Sigma x^2 + (f + f^4)\ (x'x''' + x'''x^v + x^vx'' + x''x'^v + x'^vx') + (f^2 + f^3)\ (x'x'' + x''x''' + x'''x'^v + x'^vx^v + x^vx')] : 5^2.$$

Facciasi

(VII)

(VII) $x'x'' + x''x''' + x'''x'^{v} + x'^{v}x^{v} + x^{v}x' = \pi$,
$x'x''' + x'''x^{v} + x^{v}x'' + x''x^{v} + x^{v}x' = \rho$.

Essendo $f + f^2 + f^3 + f^4 + 1 = 0$, abbiamo $f^2 + f^3 = -1 - (f + f^4)$, e, per la mancanza del secondo termine nella (I) abbiamo $\Sigma x^2 = 10a$ (n.° 35 Teor.). Dunque sostituendo, i due precedenti risultati diverranno

$$mn = [10a - \rho + (+f + f^4)(\pi - \rho)] : 5^2$$
$$pq = [10a - \pi - (f^4)(\pi - \rho)] : 5^2.$$

Si moltiplichino ora insieme questi due valori, otterremo quindi

$mnpq = [100a^2 - 10a(\pi + \rho) + \pi\rho - (f + f^2 + f^3 + f^4 + 2)(\pi - \rho)^2] : 5^4$;
ma $\pi + \rho = -5a$, $f + f^2 + f^3 + f^4 + 1 = 0$; dunque sarà $mnpq = 150a^2 - (\pi^2 + \rho^2) + 3\pi\rho$; inoltre dalle funzioni (VII) deducesi

$\pi^2 + \rho^2 = \Sigma xx^2 + 4\Sigma xxxx + 2(x'x''^2x''' + x''x'''^2x'^{v} + x'''x'^{v2}x^{v} + x'^{v}x^{v2}x' + x^{v}x'^2x'' + x'x''^2x^{v} + x^{v}x''^2x'^{v} + x'^{v}x'^2x''' + x'''x^{v2}x'' + x''x'^{v2}x')$,

$\pi\rho = \Sigma xxxx + x'^2x''x''' + x'x''x'''^2 + x'x'''^2x'^{v} + x'^2x'''x^{v} + x''x'''^2x^{v} + x'''^2x'^{v}x^{v} + x'''x'^{v}x^{v2} + x'x'''x^{v2} + \text{ec.}$

onde, chiamata μ la somma di tutti i termini $x'x'^2x'' + \text{ec.}$, che si contengono in $\pi^2 + \rho^2$, chiamata ν la somma de' termini $x'^2x''x''' + \text{ec.}$ contenuti in $\pi\rho$, ed essendo pei (1° n.° 47, 35 Teor.)

$\Sigma\overline{xx}^2 = \frac{\Sigma x^2 \times \Sigma x^2 - \Sigma x^4}{2}$, $\Sigma x^2 = 10a$, $\Sigma^4 = 50a^2 - 20c$, $\Sigma xxxx = 5c$,

per cui $\Sigma\overline{xx}^2 + 4\Sigma xxxx = \frac{\Sigma x^2 \times \Sigma x^2 - \Sigma x^4}{2} + 4\Sigma xxxx = 25a^2 + 30c$,

ottienesi infine $\pi^2 + \rho^2 = 25a^2 + 30c + 2\mu$, $\pi\rho = 5c + \nu$. Dunque con la sostituzione il precedente prodotto $mnpq$ diverrà $= (150a^2 - 25a^2 - 30c - 2\mu + 15c + 3\nu) : 5^4$, e però avremo

$mnpq = (125a^2 - 15c + 3(\mu + \nu) - 5\mu) : 5^4$.

Ora abbiamo la somma $\mu + \nu = \Sigma x^2xx$, e pel (n.° 46, 1°, 2° n.° 41 Teor) abbiamo $\Sigma x^2xx = \Sigma x^2\Sigma xx - \Sigma x\Sigma x^3 + \Sigma x^4$. Dunque, essendo $\Sigma x = 0$, $\Sigma xx = -5a$, $\Sigma x^2 = 10a$, $\Sigma x^4 = 50a^2 - 20c$, ci verrà $\mu + \nu = -20c$, e però $mnpq$ $(125a^2 - 75c - 5\mu) : 5^4$, ossia

$mnpq = [125a^2 - 75c - 5(x'x''^2x''' + x''x'''^2x'^{v} + x'''x'^{v2}x^{v} + x'^{v}x^{v2}x' + x^{v}x'^2x'' + x'x'''^2x^{v} + x^{v}x'^2x''' + x'''x^{v2}x'' + x''x'^{v2}x')] : 5^4$.

Ciò

Ciò posto, poichè nel (n.° X Mem. Malfatti Tom. 4° Accad. di Siena) dal Chiarissimo Autore si fa $mn = y$, $pq = u$, onde $mnpq = uy$, e poichè nel (n.° XIV della stessa Mem) ponesi $z = 25uy - 5a^2 + \frac{5c}{3}$, dovrà essere

(VIII) $z = -[20c + 3(x'x''^2x'''x^{v2} + x''x'''^2x'^{v}x^{v} + x'''x'^{v2}x^{v}x' + x'^{v}x^{v2}x'x'' + x'x'''^2x^{v}x^{v} + x^{v}x''^2x'^{v}x''' + x'^{v}x'^2x'''x^{v} + x'''x^{v2}x'' + x''x'^{v2}x')]: 15$; e questa sarà la funzione delle x', x'' . ec. x^{v}, a cui si uguaglia l' incognita z della trasformata, ossia risolvente di 6° grado del Sig. Malfatti. Nel (T.° XI Soc. Ital. delle Scienze) poi deducesi da Lui attualmente simile trasformata (pag. 602) in un caso particolare, nel caso cioè, in cui $x^5 + 5.2x^3 + 5^2 2^2 = 0$ è l' Equazione data (pag. 599), ed invece di $mn = y$ ponesi quivi $mn = g$ (pag. 593).

4. Essendo la data Equazione (1) generica, la z avrà esattamente tanti valori tra loro diversi, quanti sono i risultati tra loro diversi, che per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^{v}, ottengonsi nella precedente (VII). Ora per determinare quanti siano questi risultati differenti fra loro, osservo, che tanto la π, come la ρ sono tali, che i loro valori (VII) mantengonsi gli stessi sotto la permutazione semplice di 1° genere, nella quale la x' cangiasi nella x'', la x'' nella x''', la x''' nella x'^{v}, la x'^{v} nella x^{v}, e la x^{v} nella x'. Dunque avendosi pel (n.° prec.) $uy = mnpq = 150a^2 - (\pi^2 + \rho^2) + 3\pi\rho$, sotto simile permutazione non cambierà di valore neppure la uy, e però nemmeno la z.

5. Ogniqualvolta una data funzione $f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, che dirò t, conserva il valor suo per l' indicata permutazione, possiamo sempre con somma facilità determinare il grado della Equazione, da cui essa dipende, servendoci delle seguenti regole:

1.° Eseguiscasi nella supposta $t = f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$ la permutazione reciproca tra le sole due x', x'', ed osservisi, se essa per questa permutazione, cambia, o no, di valore: se no, dirò tosto che la Equazione in t è di primo grado (n.° 12 Mem., 1° n.° 27 1 Teor); e che è certamente di grado superiore, se per simile permutazione la funzione cambia di valore.

2.°

2.° Succedendo quest'ultimo caso, permuto nella t la x' nella x'', la x'' nella x''', e la x''' nella x'. Se sotto tale operazione la t conserva il proprio valore, dirò, che l'Equazione in t è di 2° grado, e che è di grado superiore, mentre lo cambia (n.° 10 Mem., 3° n.° 271 Teor.)

3.° In questo caso secondo cangio la x' nella x''', la x''' nella x'^{v}, la x^{v} nella x'', e la x'' nella x', ed osservo, se il valore della funzione cangiasi, o no: se no, l'Equazione in t sarà di 6° grado; se sì, di grado superiore (2° n.° 40 Mem., 8° n.° 271 Teor.)

4.° In questo caso ultimo permuto simultaneamente la x' nella x'^{v}, e la x'^{v} nella x', la x'' nella x''', la x''' nella x''; e dirò, che l'Equazione in t è del duodecimo grado se la t per tale permutazione conservasi la stessa (2° n.° 40 Mem., 8° n.° 271 Teor.); che se non si conserva, dirò finalmente, che l'Equazione in t è del 24° grado (n.° 40 Mem., n.° 271 Teor.).

6. Comprendendosi in queste regole tutti i casi possibili, riguardanti il grado, a cui può ascendere l'Equazione avente l'incognita t precedentemente supposta (n.° 40 Mem., n.° 271 Teor.), ne viene, che per determinare il grado della Equazione in z, non si dovrà che applicare ad essa le regole medesime.

1.° Comincio perciò dal permutare nella (VIII) reciprocamente la x' nella x'', e veggo che il primo termine $x'x''^{2}x'''$ diviene $x''x'^{2}x'''$. Ora prima di procedere innanzi, rifletto, che se la nostra funzione per tale permutazione non cangiasse, questo termine $x''x'^{2}x'''$ dovrebbe contenersi fra i termini della (VIII); ma realmente veggo, che non vi si contiene. Dunque, senza procedere innanzi, concluderò subito che la permutazione presente induce cambiamento nella (VIII), e però che l'Equazione in z è di un grado > 1.

2. Eseguisco quindi la seconda delle permutazioni precedenti, ed osservo, che per essa il primo termine $x'x''^{2}x'''$ diventa $x''x'''^{2}x'$; ma neppur questo $x''x'''^{2}x'$ contiensi nella (VIII) Dunque concluderò, come precedentemente, che l'Equazione in z supera eziandio il secondo grado.

3.° Faccio la permutazione del (3° n.° prec.), e per essa veg-

veggo, che il termine $x' x''^2 x'''$ diviene $x''' x'^2 x'^v$; ma questo $x''' x'^2 x'^v$ contiensi nella (VIII). Dunque rapporto a tale permutazione non potrò concludere, come rapporto alle due precedenti, e però la eseguirò sopra tutti i termini; ma essa attualmente effettuata ci somministra dalla (VIII) il risultato

$$-[20c+3(x'''x'^2x'^v+x'x'^{v2}x''+x'^vx''^2x^v+x''x^{v2}x'''+x^vx'''^2x'+ x'''x'^{v2}x^v+x^vx'^2x''+x''x'''^2x'^v+x'^vx^{v2}x'+x'x''^2x''')]:15$$

e questo è identico alla funzione (VIII) Dunque per la regola stabilita nel (3° n.° prec.) concluderò, che la Equazione in z è di 6° grado, come difatti ha determinato praticamente col mezzo di calcoli assai ingegnosi (T.° XI. Soc. Italiana delle Scienze) il Sig. Malfatti nel (n.° XIV della sua Mem. Accad di Siena).

Nel (n.° 4) abbiam veduto il perchè la (VIII) conservi il proprio valore per la permutazione semplice di 1° genere fra tutte e cinque le radici, che abbiamo colà indicata; determineremo poi il perchè lo conservi eziandio per la permutazione semplice di 1.° genere fra le quattro $x', x'' x^{IV}, x'^v$, che si è accennata nel (3.° n.° 5), osservando che le funzioni (VI) nascono l'una dall'altra per simile permutazione, e che quindi la $uy = mnpq$, da cui dipende la z (n.° 3), non può sotto di essa cangiar punto di valore.

7. Volendo determinare i sei risultati della funzione (VIII) uguali ai sei valori della z (n.° 3), chiamata v, e posta $= f(x')(x'')(x''')(x^v)(x'^v)$ la somma $x'x''^2x''' + x''x'''^2x'^v +$ cc. contenuta nella (VIII) medesima, osservo che questa v deve cangiar di valore per la permutazione semplice di 1° genere fra le radici che occupano i primi tre luoghi, e per l'altra fra le radici de' primi due luoghi (1°2°n.°61). Dunque, eseguita sopra la v la prima di queste permutazioni. ed eseguita poscia sopra ciascuno dei tre risultati, che ne nascono, la permutazione seconda, otterremo sei risultati, i quali essendo, per quanto abbiamo ora detto, disuguali tra loro, altro non esprimeranno, che i sei valori tra loro diversi della v corrispondenti ai sei della z. Simili valori saranno i seguenti.

$v' =$

$$v'=f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})=x'x''^{2}x'''+x''x'''^{2}x'^{v}+x'''x'^{v2}x^{v}+x'^{v}x^{v2}x'$$
$$x^{v}x'^{2}x''+x'x'''^{2}x^{v}+x^{v}x''^{2}x'^{v}+x'^{v}x'^{2}x'''+x'''x^{v2}x''+x''x'^{v2}x',$$
$$v''=f(x'')(x''')(x')(x'^{v})(x^{v})=x''x'''^{2}x'+x'''x'^{2}x'^{v}+x'x'^{v2}x^{v}+x'^{v}x^{v2}x''$$
$$+x^{v}x''^{2}x'''+x''x'^{2}x^{v}+x^{v}x'''^{2}x'^{v}+x'^{v}x''^{2}x'+x'x^{v2}x'''+x'''x'^{v2}x'',$$
$$v'''=f(x''')(x')(x'')(x'^{v})(x^{v})=x'''x'^{2}x''+x'x''^{2}x'^{v}+x''x'^{v2}x^{v}+x'^{v}x^{v2}x'''$$
(IX) $$+x^{v}x'''^{2}x'+x'''x''^{2}x^{v}+x^{v}x'^{2}x'^{v}+x'^{v}x''^{2}x'''+x'''x^{v2}x'+x'x'^{v2}x'',$$
$$v'^{v}=f(x'')(x')(x''')(x'^{v})(x^{v})=x''x'^{2}x'''+x'x'''^{2}x'^{v}+x'''x'^{v2}x^{v}+x'^{v}x^{v2}x''$$
$$+x^{v}x''^{2}x'+x''x'''^{2}x^{v}+x^{v}x'^{2}x'^{v}+x'^{v}x''^{2}x'''+x'''x^{v2}x'+x'x'^{v2}x'',$$
$$v^{v}=f(x''')(x'')(x')(x'^{v})(x^{v})=x'''x''^{2}x'+x''x'^{2}x'^{v}+x'x'^{v1}x^{v}+x'^{v}x^{v2}x'''$$
$$+x^{v}x'''^{2}x''+x'''x'^{2}x^{v}+x^{v}x''^{2}x'^{v}+x'^{v}x'''^{2}x'+x'x^{v2}x''+x''x'^{v2}x''',$$
$$v^{v'}=f(x')(x''')(x'')(x'^{v})(x^{v})=x'x'''^{2}x''+x'''x''^{2}x'^{v}+x''x'^{v2}x^{v}+x'^{v}x^{v2}x'$$
$$+x^{v}x'^{2}x'''+x'x''^{2}x^{v}+x^{v}x'''^{2}x'^{v}+x'^{v}x'^{2}x''+x''x^{v2}x'''+x'''x'^{v2}x'.$$

Ora dalla (VIII) abbiamo $z=-(20c+3v):15$. Dunque essendo $z'=-(20c+3v'):15$, $z''=-(20c+3v''):15$; ec. $z^{v'}=-(20c+3v^{v}):15$, otterremo le sei funzioni, a cui si uguagliano le radici z', z'', ec. $z^{v'}$, ponendo invece delle v', v'', ec. $v^{v'}$ le precedenti rispettive funzioni. Se con queste v', v'', ec. $v^{v'}$ si formasse un' Equazione $v^{6}+Mv^{5}+Nv^{4}+$ ec. $=0$, i coefficienti M, N, ec. essendo funzioni della forma $f(v', v'', \text{ec. } v^{v'})$, sarebbero tuttti pel (n.° 105 Teor.) determinabili razionalmente con i coefficienti della data (I).

Paragonando i precedenti risultati (IX) con quelli della (Tavola VI. Teor.), avremo $v'=$ ris.° 1°, $v''=3°$, $v'''=4°$, $v'^{v}=2°$, $v^{v}=6°$, $v^{v'}=5°$. Coll' eseguire poi su questi la permutazione semplice di 1° genere tra le radici dei primi quattro luoghi, che abbiamo accennata nel (3° n.° 5), e per cui la v' mantiene il proprio valore (3° n.° 6), pel (n.° 96 Teor.) otterremo, paragonando con i risultati della citata Tavola,

v' = ris.° $1°=9°=24°=17°$, $v''=3°=10°=23°=14°$,
$v'''=4°=7°=20°=18°$, $v'^{v}=2°=11°=22°=15°$,
$v^{v}=6°=8°=19°=16°$, $v^{v'}=5°=12°=21°=13°$,

e permutando finalmente in ciascuno di questi ultimi, giusta il (n.° 4) la radice, che occupa il primo luogo in quella del secon-

do, la radice del secondo in quella del terzo, e così di seguito; pei cit. (n° 4), e (n.° 96 Teor.) otterremo i venti risultati delle file 1^a, 9^a, 24^a, 17^a nella Tavola tutti uguali fra loro; così uguali fra loro i venti risultati delle linee 3^a, 10^a, 23^a, 14^a; uguali tra loro gli esi stenti nelle linee 4^a, 7^a, 20^a, 18^a, e così in progresso.

In conseguenza di simili osservazioni vedesi quali siano i risultati, che, provenendo sotto le varie permutazioni fra le x', x'', ec. x^v dalla v, uguagliansi fra di loro, e quali siano tra lor disuguali: dunque dalle osservazioni medesime conosceremo ancora quali tra i risultati provenienti dalla z siano uguali tra loro, e quali no. Da tutto insieme poi apparisce perchè la precedente Equaz. in v, e però l'altra in z del Sig. Malfatti risulti del grado 6°, mentre la trasformata de' Sigg. Eulero, e Bezout diventava del 24°.

La funzione, a cui si uguaglia l' incognita della Equazione di 6° grado, che viene indicata dal Sig. Lagrange è la seguente.

(X) $$2\,[x'^3(x''x^v + x'''x'^v) + x'''^3(x'x''' + x'^v x^v) + x'''^3(x''x'^v + x'x^v) + x'^{v3}(x'''x^v + x'x'') + x^{v3}(x'x'^v + x''x''')] +$$
$$3\,[x'(x''^2x^{v2} + x'''^2x'^{v2}) + x''(x'^2x'''^2 + x'^{v2}x^{v2}) + x'''(x''^2x'^{v2} + x'^2x^{v2}) + x'^v(x'''^2x^{v2} + x'^2x''^2) + x^v(x'^2x'^{v2} + x''^2x'''^2)]$$

(n.° 74 Sect. 3.ª Réflex. ec. Accad. de Berlin pour l'an. 1771); ma paragonando questa con la precedente funzione (VIII), esse truovansi tra lor differenti: dunque dalla risolvente attualmente determinata dal Sig. Malfatti (n.° XIV. Mem. Malf. Tom. 4° Accad. di Siena) diversa sarebbe quella, che, compiendo il calcolo (n.° 74 Sect. 3ª Réflex.), avrebbe potuto determinare il Sig. Lagrange. La somiglianza però delle funzioni indicate (n.° 3 Teor) farà sì pel (n.° 100 Sect. 4ª Réflex. ec. n.° 144 Teor. delle Equaz.), che da ciascuna delle radici della Equazione Malfatti può col mezzo di una semplice Equazione lineare determinarsi ciascuna delle radici nella Equazione Lagrange, e viceversa. Siccome poi possiamo sempre formare infinite funzioni simili alla (VIII), ed alla (X); quindi ne viene, che la data Equazione di 5° grado potrà sempre trasformarsi in infinite altre tutte di grado 6°. Ciascheduna però di queste Equazioni, siccome quella de' Sigg. Lagrange, e Malfatti, sarà inutile alla risoluzione della proposta, mentre

tre sia essa generale . Che se , essendo l'Equazione data particolare , una qualunque di queste trasformate , in conseguenza del particolare valore , o rapporto fra le x', x'', ec. x^{v} contenga un divisor razionale, pel citato (n.° 100 Réflex. ec. n.° 144 Teor. delle Equaz.) dovrà contenere un fattor razionale dello stesso grado eziandio ciascheduna delle altre ; e però contenendolo ancora la risolvente del Sig. Malfatti, questa sola , essendo già determinata, potrà servirci, ogniqualvolta data una Equazione di 5° grado particolare, voglia scuoprirsi, se una sua risolvente di 6° contenga un fattor razionale , onde poi ricavarne la soluzione .

Ho detto , onde ricavarne la soluzione ; perchè potremo sempre ottener questa, mentre in una qualsivoglia delle esposte risolventi venga a conoscersi una radice . Chiamata difatti z' tale radice, cerco da essa il valore della m^5, essendo la m quella stessa , che abbiamo supposta nel (n.° 1) . Poichè le z', m^5 sono, per quanto si è detto precedentemente , due funzioni delle x' , x'' , ec. x^{v} tali , che per la permutazione , che abbiamo accennata nel (3° n. 5), la prima di esse si conserva dello stesso valore , e la seconda si cambia, e tali, che per quelle fra tutte le altre permutazioni, sotto cui la z' mantiene, o cangia il valor proprio, lo mantiene corrispondentemente , o cangia eziandio la m^5 ; ne segue , che effettuando l' indicata ricerca , caderemo per questa m^5 in un' Equazione di 4° grado , della quale è facile a vedersi dai valori (VI) , e dalla permutazione del cit.° (3° n.° 5) , che saranno radici le quantità m^5, p^5, q^5, n^5 . Supposti pertanto ottenuti attualmente i valori di queste quattro quantità , ne estraggo le radici quinte, le sostituisco rispettivamente nelle Equazioni (II) , e si otterranno così i cinque richiesti valori della x .

Nella Equazione $x^5 + 5.2x^3 + 5^2.2^2 = 0$ del Sig. Malfatti (pag. 599 T.° XI. Soc. Ital. delle Scienze) alcune circostanze particolari facilitano assai di più il calcolo . Difatti contenendosi dalla sua risolvente esposta nella (pag. 602) il fattor razionale $z + 5.2^2$, questo ci somministra $z' = -5\,2^2$; e però uy , os-ia ug (n.° 3) $= 0$; ma $ug = mnpq$. Dunque dovendo nel presente caso una delle quantità m, n, p, q essere $= 0$; e semplificandosi

quindi assaissimo tanto le Equazioni supposte nella (pag. 593), come la Equazione in r esistente nella (pag. 602), non saremo più, per la determinazione delle m^5, n^5, p^5, q^5, necessitati di cadere nella sovraesposta Equazione di 4° grado. Dal paragone difatti della $x^5 + 5.2x^3 + 5^2.2^2 = 0$ con la Equazione generale (I) avendosi $a = -2$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 5^2.2^2$, ed a cagione di $ug = 0$ avendosi dalla Equazione in r (pag. 602) $r = \pm 4$, pongasi in primo luogo $m = 0$, $r = -4$, le Equazioni della (pag. 593) diverranno perciò $u = -2$, $t = 4$, $pq = -2$, $n^2p = -4$, $nq^2 = 4$, e ottenendosi quindi con la semplice eliminazione $n^5 = 2^4$, $p^5 = -2^2$, $q^5 = 2^3$, onde

$$m = 0, p = -\sqrt[5]{2^2}, q = \sqrt[5]{2^3}, n = \sqrt[5]{2^4};$$

le Equazioni (II) con la sostituzione di questi valori diventeranno

$$\text{(XI)} \quad \begin{aligned} x' &= -\left(-f^2\sqrt[5]{2^2} + f^3\sqrt[5]{2^3} + f^4\sqrt[5]{2^4}\right), \\ x'' &= -\left(-f^4\sqrt[5]{2^2} + f\sqrt[5]{2^3} + f^3\sqrt[5]{2^4}\right), \\ x''' &= -\left(-f\sqrt[5]{2^2} + f^4\sqrt[5]{2^3} + f^2\sqrt[5]{2^4}\right), \\ x^{IV} &= -\left(-f^3\sqrt[5]{2^2} + f^2\sqrt[5]{2^3} + f\sqrt[5]{2^4}\right), \\ x^{V} &= -\left(-\sqrt[5]{2^2} + \sqrt[5]{2^3} + \sqrt[5]{2^4}\right); \end{aligned}$$

e queste saranno le cinque radici della proposta Equazione particolare.

Ritenuto $r = -4$, sia $n = 0$: in questa ipotesi otterremo col medesimo calcolo

$$m = \sqrt[5]{2^4}, p = \sqrt[5]{2^3}, q = -\sqrt[5]{2^2}, n = 0.$$

Che se, posto $r = 4$, facciasi $p = 0$, oppure $q = 0$; nel primo di questi casi ci risulterà

$$m = \sqrt[5]{2^3}, p = 0, q = \sqrt[5]{2^4}, n = -\sqrt[5]{2^2},$$

e nel secondo

$$m = -$$

$m = -\sqrt[5]{2^2}$, $p = \sqrt[5]{2^4}$, $q = 0$, $n = \sqrt[5]{2^3}$.

Ora sostituendo nelle (II) i valori delle m, n, p, q, che sonosi ottenuti in ciascuno degli esposti casi, sempre ne risultano i valori (XI). Dunque la soluzione dell'Equazione data si ha egualmente, qualunque delle m, n, p, q uguagliasi allo zero, mentre però, allorquando ponesi m, od $n = 0$, facciasi $r = -4$, e quando ponesi p, ovvero $q = 0$, si faccia $r = 4$.

Onde determinare la ragione di questo fenomeno, chiamo, per brevità di scrivere, P' il primo dei valori (XI), P'' il secondo, ec., ed osservo, che ad eccezione della x^v, la qual sola rappresenta un' espressione delle m, n, p, q mancante della f, cioè la $m + p + q + n$ (n.° 1), le altre lettere x', x'', x''', x'^v per la forma de' valori (II) sono tutte tali, che da ciascuna delle medesime ciascheduna può esprimersi delle radici P', P'', P''', P'^v. Dunque, ritenute le supposizioni del (n.° 1), se vogliamo, che la x' rappresenti la prima radice P', allora avremo $m = 0$; ma se si vuole, che questa prima radice venga rappresentata dalla x'', o dalla x''', o dalla x'^v; in tali casi, mancando in essa P' il termine, nel quale la supposta f è alla potenza prima, dovrà come apparisce dalle (II) essere rispettivamente $q = 0$, ovvero $p = 0$, ovvero $n = 0$; e per conseguenza ciascuna di queste supposizioni dovrà poterci somministrare la soluzion della data.

Passando alla considerazione della r, comincio dall' osservare, che ponendo nella (VI) i valori P', P'', P''', P'^v, P^v delle radici, esse (VI) divengono

$$\text{(XII)}\quad \begin{aligned} m &= -(f^4P' + f^3P'' + f^2P''' + fP'^v + P^v) : 5, \\ p &= -(f^4P''' + f^3P' + f^2P'^v + fP'' + P^v) : 5, \\ q &= -(f^4P'' + f^3P'^v + f^2P' + fP''' + P^v) : 5, \\ n &= -(f^4P'^v + f^3P''' + f^2P'' + fP' + P^v) : 5; \end{aligned}$$

ma per la forma delle (II)

quando $m = 0$, esser deve $P' = x', P'' = x'', P''' = x''', P'^v = x'^v, P^v = x^v$,

quando $n = 0$, esser deve $P' = x'^v\ P'' = x''', P''' = x'', P' = x', P^v = x^v$,

quando $q = 0$, esser deve $P' = x''', P'' = x', P''' = x'^v, P'^v = x'', P^v = x^v$,

e quando $q = 0$, esser deve $P = x'', P'' = x'^v, P' = x', P'^v = x''', P^v = x^v$,

Dun-

Dunque col porre nelle (XII) invece della P', P'', ec. le corrispondenti lettere x', x'', ec. le (XII) medesime quando $m=0$, divenendo

$$\begin{aligned} m &= -(f^4x'+f^3x''+f^2x'''+fx'^v+x^v):5, \\ p &= -(f^4x'''+f^3x'+f^2x'^v+fx''+x^v):5, \\ q &= -(f^4x''+f^3x'^v+f^2x'+fx'''+x^v):5, \\ n &= -(f^4x'^v+f^3x''+f^2x''+fx'+x^v):5, \end{aligned}$$

quando $n=0$, divenendo

$$\begin{aligned} m &= -(f^4x'^v+f^3x'''+f^2x''+fx'+x^v):5, \\ p &= -(f^4x''+f^3x'^v+f^2x'+fx'''+x^v):5, \\ q &= -(f^4x'''+f^3x'+f^2x'^v+fx''+x^v):5, \\ n &= -(f^4x'+f^3x''+f^2x'''+fx'^v+x^v):5, \end{aligned}$$

quando $p=0$, divenendo

$$\begin{aligned} m &= -(f^4x'''+f^3x'+f^2x'^v+fx''+x^v):5, \\ p &= -(f^4x'^v+f^3x'''+f^2x''+fx'+x^v):5, \\ q &= -(f^4x'+f^3x''+f^2x'''+fx'^v+x^v):5, \\ n &= -(f^4x''+f^3x'^v+f^2x'+fx'''+x^v):5, \end{aligned}$$

e quando $q=0$, divenendo

$$\begin{aligned} m &= -(f^4x''+f^3x'^v+f^2x'+fx'''+x^v):5, \\ p &= -(f^4x'+f^3x''+f^4x'''+fx'^v+x^v):5, \\ q &= -(f^4x'^v+fx'''+f^2x''+fx'+x^v):5, \\ n &= -(f^4x'''+f^3x'+f^2x'^v+fx''+x^v):5; \end{aligned}$$

ne segue, che il passare dalla supposizione di $m=0$ all' altra di $n=0$, e da quella di $p=0$ all' altra di $q=0$ equivale all' eseguirsi nelle funzioni corrispondenti quella permutazione semplice di 2.° genere fra le x', x'', x''', x'^v, per cui dalle m, p produconsi rispettivamente le n, q, ed il passare dalla ipotesi di $m=0$ all' altra di p, ovvero di $q=0$, e da quella di $n=0$ all' altra di q, o di $p=0$ equivale all' effettuarsi quella permutazione semplice di genere 1.° per cui dalla m producesi rispettivamente la p, oppure la q, e dalla n la q, ovvero la p.

Ciò posto, essendo evidentemente ancora la r una funzione delle x', x'', ec. x^v, eseguisco su di lei quella permutazione semplici-

plice di 1.° genere, per cui dalla m producesi la p, e ripetendo questa quanto si può, chiamo r', r'', r''', r^{IV} i risultati che ne vengono: poichè abbiamo $r = m^2 q + n^2 p$, (pag. 593), sarà $r'=m^2q+n^2p$, $r''=p^2m+q^2n$, $r'''=n^2p+m^2q$, $r^{IV}=q^2n+p^2m$, ma coll' eseguire su della r la permutazione, per cui dalla m risulta la q, ottengonsi gli stessi quattro risultati. Dunque essendo $r'=r'''$, $r''=r^{IV}$; per queste due permutazioni la r non acquista che due soli valori differenti tra loro, cioè i due r', r''; ora con la permutazione, per cui dalla m producesi la n, e dalla p la q, dalla quantità $r' = m^2q + n^2p$ si ottiene $n^2p + m^2q$, e dalla $r''=p^2m+q^2n$ si ricava q^2n+p^2m. Dunque altro questi non essendo, che i risultati medesimi, da cui provengono; ne segue, che per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^v, per cui le precedenti m, n, p, q cambiansi fra di loro; la r non acquista che i due valori fra loro diversi r', r''. Dunque da tuttociò, che abbiam detto finora, raccogliendosi, che tanto r', come r'' non cambiano di valore, mentre dalla ipotesi di $n=0$ si passa alla ipotesi di $n=0$, e da quella di $p=0$ all' altra di $q=0$, e che il valore r' cambiasi nell' altro r'', mentre dalla supposizione di $m=0$ all' altra si passa di p, ovvero di $q=0$, e dalla supposizione di $n=0$ all' altra si passa di q, ovvero di $p=0$; concluderemo 1.° che, essendo r' il valore della r, il quale corrispondentemente al caso di $m=0$ serve alla determinazione delle x', x'', cc. x^v, lo stesso r' servirà alla determinazione medesima anche nel caso, in cui dalla $m=0$ passiamo alla $n=0$; 2.° che quando dalla $m=$ passiamo alla p, od alla $q=0$ per la indicata determinazione dovrà servire non più il valore r', ma l' altro r''; 3.° che finalmente lo stesso r'' dovrà servire, mentre dalla $m=0$ si passa alla $q=0$.

Tali sono le ragioni di quanto è accaduto nella soluzione della $x^5 . 5 . 2x + 5^2 . 2^2 = 0$ Se la data Equazione particolare sia differente da questa, ma però sia tale, che possa scuoprirsi il valore della m, qualunque esso siasi, è facile il vedere, che hanno sempre luogo la stessa precedente analisi, e le medesime conclusioni.

Se-

Se l' equazione in r della (pag. 602) è attualmente di 3.° grado, ciò è, perchè contiene una radice estranea introdottasi per cagione del calcolo, come diffatti apparisce rapporto al valore zero della r, mentre $ug=o$, giacchè questo valore non serve punto allo scioglimento della data. I due valori finalmente della r altro non sono, che i due r, t della (pag. 593).

SAG-

SAGGIO

Di Vittorio Fossombroni

SOPRA IL MOTO DEGLI ANIMALI, E SOPRA I TRASPORTI

Ricevuto li 10 *Ottobre* 1805.

ARTICOLO I.

1. Frequentemente avviene, che gli oggetti più comuni non sono i primi ad illustrarsi con i lumi delle Scienze, perchè le meditazioni dei Sapienti sono richiamate a preferenza verso i più complicati, ed imponenti fenomeni, e perchè l' amor proprio è meno lusingato dal meritare una riconoscenza incerta per chi providde alle giornaliere esigenze Sociali, che dall' eccitare un' ammirazione immancabile per chi superò delle straordinarie difficoltà.

2. Principiando da Aristotele, tutti i moltissimi Autori, che hanno scritto sul moto dei Quadrupedi, e segnatamente del Cavallo, che a contemplazione dei suoi utili servigj è preferito nelle occasioni di maggior fatica, e pericolo, formano due partiti, uno dei quali sostiene, che il Cavallo muove prima le due gambe da una parte, e poi le due dall' altra; e secondo l' altro partito, muove una delle anteriori, e poi la posteriore diagonalmente opposta; di maniera, che si criticano a vicenda ancora gli Artisti, che modellano, o disegnano questo animale con due gambe, o da una stessa parte, o diagonalmente sollevate. In una così lunga, e diffusa disparità d' opinione, che alcuni credono di comporre contemplando piuttosto il trotto, che il passo, o piuttosto l' ambio, che il galoppo ec., sembrerà strano l' asserire, che ambidue i partiti hanno ragione. Ma pure questa è la verità, e non credo dover estendermi lungamente per dimostrarlo, giacchè

serve risvegliare l'attenzione sopra quattro punti disposti agli angoli di un rettangolo, e che progredendo uno dopo l'altro, con la condizione che ad uno davanti succeda uno di quelli di dietro, e viceversa, non possono evitare di combinarsi nel moto, alternativamente, una volta in diagonale, e un'altra, dalla istessa parte; di maniera che, quando un Cavallo cammina, se si principia a contare da un piede di dietro, si vedrà succedere quello davanti dalla medesima parte, e principiando a contare da un piede davanti, si vedrà succedergli quello di dietro diagonalmente opposto. Onde Paolo Uccello, contro di cui fu tanto scritto, e parlato, per il Cavallo dipinto nel Duomo di Firenze, con due piedi alzati dalla parte destra, ha egual ragione, che Giovanni Bologna, il quale modellò il suo di bronzo con due piedi alzati diagonalmente.

3. Può frattanto facilmente congetturarsi, che resta ancora non poco da speculare sopra l'analisi del moto degli animali, specialmente se si considerino applicati loro dei pesi da sopportarsi, o da tirarsi strisciando sul suolo, e se si faccia attenzione alla necessità di computare l'elaterio dei muscoli, e lo sforzo eseguibile senza defaticare l'animale a scapito della sua esistenza. Questa veduta è necessario, che non sia trascurata, mentre, per esempio, in una strada di montagna tre muli con un baroccio trasportano 3000 libbre, e a soma ne porteranno forse 1500; onde si presenta subito una gran prevenzione in favore del Baroccio. Ma se occorra, che a soma i tre muli marcino spontaneamente, e fia d'uopo stimolarli quando sono al Baroccio, ignorando quanto si attenti alla loro vitalità, e si riscontri poi (come in molti casi il fatto ha provato), che tre muli a soma seguitano a servire per 10, o 12 anni, mentre destinati al Baroccio, dopo 3, o 4 anni si riducono quasi inservibili, converrà concludere, che il servizio ordinario in quella tale strada, esige piuttosto la soma, che i Carri. E quì si avverta, che non entrano in siffatti calcoli le urgenze straordinarie, e nemmeno certe commerciali circostanze, per le quali può metter conto sacrificare ogn'anno un nu-

numero di Bestie da tiro, per ottener maggiore sollecitudine nel trasporto delle merci.

4. D'appresso queste considerazioni sembrami, che convenga trattare la materia in questione, e per indicarne le traccie, principierò dall'analizzare il moto di progressione nella Macchina Umana, rimettendo al giudizio dei Dotti se tale argomento, sebbene in se stesso antichissimo, possa comparire affatto nuovo. Suppongo un uomo caricato di un peso determinato, e che al centro di gravità della Macchina propria, e del predetto peso (che uniti insieme suppongo eguali alla massa X), sia attaccata una corda eguale a b, la quale alla sua estremità abbia un altro corpo, che progredendo l'uomo, striscia sul piano in cui l'uomo stesso cammina.

5. Ciò posto, osservo primieramente, che acciò il centro di gravità descrivesse un arco di cerchio, come alcuni credettero, bisognerebbe, che la gamba, che spinge il corpo in avanti, restasse di costante lunghezza; ma ciò non accade, perchè le giunture inferiori spiegandosi, rendono tale lunghezza variabile; e sebbene la variazione possa parer piccola rispetto all'alterazione della curva, non è però tale rispetto allo sforzo dei muscoli, che appunto in questa circostanza si presenta alla più esatta considerazione, combinandosi colla gravità del corpo, e con gli estrinseci aggravj, che vi si suppongono aggiunti.

6. Un altro accidente accompagna il passo dell'Uomo, ed è una oscillazione a dritta, e sinistra, secondo che il sinistro, o il destro piede si porta in avanti, e questo fa sì, che il centro di gravità deve descrivere una curva a doppia curvatura, di cui nel modo seguente io trovo la determinazione.

7. Sia Z la distanza del centro di gravità dal punto del piede in cui si riunisce lo sforzo, che anima il passo, il qual passo sia principiato di maniera, che il centro di gravità sia in un punto della curva corrispondente alle tre coordinate ortogonali x, s, y, supponendo che le x, s, siano nel piano sopra cui l'uomo cammina, le y normali al piano medesimo, e l'origine, nel punto del piede in cui si riunisce lo sforzo, che anima il passo.

8. Ciò posto avremo $z = (x^2+s^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, e l' angolo, che fa z con il piano delle x, s, avrà per seno $\frac{y}{(x^2+s^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$, e per coseno $\left(\frac{x^2+s^2}{x^2+s^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. E se si consideri come rettilinea la corda b, che congiunge il centro di gravità con il grave, che strisciando in terra, vien tirato dall' uomo, l' angolo, che fa b con il piano suddetto delle x, s, si potrà facilmente esprimere per mezzo del suo seno, che sarà $\frac{y}{b}$, e del suo coseno, che sarà $\left(\frac{b^2-y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

9. È chiaro frattanto, che quando il corpo avrà percorso un elemento della curva, avrà parimente, nell'istante dt, percorso dx con la celerità $\frac{dx}{dt}$, ds con la celerità $\frac{ds}{dt}$, e dy con la celerità $\frac{dy}{dt}$, ed in questa circostanza si accingerebbe a descrivere gli spazj $d(x+dx)$, $d(s+ds)$, $d(y+dy)$; ma è agitato, 1° dalla gravità della massa X, che produce in un istante dt la celerità pdt (esprimendo per p la celerità, che nasce in un minuto secondo in virtù della gravità), 2° dalla forza ritardatrice del corpo attaccato alla corda b, e che farà nell'istante medesimo nascere la celerità Rdt, 3° dalla forza acceleratrice prodotta dallo spiegarsi, che fanno i muscoli nella direzione di z, la qual forza produrrà nell' istante medesimo la celerità Qdt.

10. Ciò posto riportiamo tali celerità alle direzioni dei tre assi delle x, s, ed y, ed avremo primieramente pdt nel senso della y, supponendo per più semplicità il piano delle x, ed s orizzontale. Si osservi però, che un piccolo ed ovvio cangiamento di calcolo basterà, per passare da questa ipotesi, a quella di una qualunque inclinazione.

11. La celerità Qdt, diretta secondo la linea z, si risolve evidentemente nelle tre $\frac{y}{z}Qdt$, $\frac{s}{z}Qdt$, $\frac{x}{z}Qdt$, le quali sono rispettivamente computate nella direzione delle y, delle s, e delle x. Così pure la celerità Rdt, nel senso della b, equivale in com-

complesso alla celerità $\frac{y}{b}\,R dt$ nella direzione delle y, alla celerità $\frac{s}{b}\,R dt$ nel senso delle s, ed alla celerità $\left(\frac{b^2-y^2-s^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} R dt$ nella direzione delle x.

12. Quando pertanto il centro di gravità avrà percorso gli spazietti dy, ds, dx con le celerità $\frac{dy}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, tenderà a continuare il suo moto, relativamente alle stesse tre direzioni, con le celerità espresse dalle tre formole seguenti, nelle quali i termini affetti di R, e di p, si trovano col segno —, perchè la loro influenza è in diminuzione delle coordinate

$$\frac{dy}{dt} + \frac{yQdt}{z} - \frac{yRdt}{b} - pdt,$$

$$\frac{ds}{dt} + \frac{sQdt}{z} - \frac{sRdt}{b},$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{xQdt}{z} - \frac{(b^2-y^2-s^2)^{\frac{1}{2}}}{b} R dt:$$

ma tali celerità debbono altronde essere eguali rispettivamente a $\frac{d(y+dy)}{dt}$, $\frac{d(s+ds)}{dt}$, $\frac{d(x+dx)}{dt}$, dunque avremo le tre equazioni

$$(1) \qquad \frac{yQdt}{z} - \frac{yRdt}{z} - pdt = d\frac{dy}{dt},$$

$$(2) \qquad \frac{sQdt}{z} - \frac{sRdt}{b} = d\frac{ds}{dt},$$

$$(3) \qquad \frac{xQdt}{z} - \frac{(b^2-y^2-s^2)}{b} R dt = d\frac{dx}{dt}.$$

le quali determinano la curva descritta in questo caso dal centro di gravità.

13 Che se la corda espressa con la lettera h, invece di essere di una costante lunghezza quando incontra il piano delle s, x, trovi una puleggia, passando per la quale penda verticalmente, e porti un grave, che venga ad essere elevato quando il centro di gravità progredisce, in tal caso la porzione di corda intercetta tra il piano suddetto, e il centro di gravità, andrà crescendo mentre il passo si compie, e sarà costante la distanza tra la puleggia, e il

e il punto in cui il piano delle s, x, viene incontrato dalla linea z.

14. Fatta tale distanza $= m$, si vedrà facilmente, che la porzione di corda intercetta tra il piano delle s, x, e il centro di gravità sarà $= [(x+m)^2+y^2+s^2]^{\frac{1}{2}}$; onde l'angolo, che tale porzione di corda fa con il piano delle y, s, avrà il seno $= \frac{x+m}{(y^2+s^2+(x+m)^2)^{\frac{1}{2}}}$; dunque la celerità Rdt computata nel senso delle x, sarà in questo caso $= \frac{(x+m)Rdt}{(y^2+s^2+(x+m)^2)^{\frac{1}{2}}}$, onde la curva del centro di gravità in questo caso verrà rappresentata dalle tre seguenti equazioni, nelle quali suppongo per maggior brevità $(y^2+s^2+(x+m)^2]^{\frac{1}{2}} = r$,

$$(4) \qquad \frac{yQdt}{z} - \frac{yRdt}{r} - pdt = d\frac{dy}{dt}$$

$$(5) \qquad \frac{sQdt}{z} - \frac{sRdt}{r} = d\frac{ds}{dt}$$

$$(6) \qquad \frac{xQdt}{z} - \frac{(x+m)Rdt}{r} = d\frac{dx}{dt}.$$

15. Se, per facilitare, si prescinda dalla doppia curvatura; la determinazione della quale dipende da molti dettagli, che quì non hanno luogo, e facciasi $s = 0$, e si restituiscano ad r, e z, i loro valori, la curva descritta dal centro di gravità nel piano verticale delle x, y, sarà espressa, nel primo caso, dalle due seguenti equazioni

$$(7) \qquad \frac{Qxdt}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{Rdt(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{b} = d\frac{dx}{dt},$$

$$(8) \qquad \frac{Qydt}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{Rydt}{b} - pdt = d\frac{dy}{dt},$$

e nel caso secondo dalle due

$$(9) \qquad \frac{Qxdt}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x+m)Rdt}{(y^2+(x+m)^2)^{\frac{1}{2}}} = d\frac{dx}{dt}$$

$$(10) \qquad \frac{Qydt}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{Rydt}{(y^2+(x+m)^2)^{\frac{1}{2}}} - pdt = d\frac{dy}{dt}.$$

16. Si può notare di passaggio, che per questo secondo caso

so

so riesce facile una prima integrazione, nella ipotesi di Q, ed R, costanti, mentre aggiungendo l'equazione (9) moltiplicata per $\frac{dx}{dt}$, alla (10) moltiplicata per $\frac{dy}{dt}$, si ottiene $\frac{dx}{dt}\,d\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\,d\frac{dy}{dt}$ $= Q\frac{x dx+y dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - R\frac{(x+m)dx+y dy}{(y^2+(x+m)^2)^{\frac{1}{2}}} - p dy$, onde integrando

$\frac{dx^2+dy^2}{2dt^2} = Q(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - R[y^2+(x+m)^2]^{\frac{1}{2}} - py + \text{Cost.}$

17. Si noti, che supponendo $Q = o$, le quattro equazioni (7), (8), (9), (10) si riducono alle seguenti

$$\frac{R dt(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{b} = -d\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{R y dt}{b} + p dt = -d\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{R dt(x+m)}{(y^2+(x+m)^2)^{\frac{1}{2}}} = -d\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{R y dt}{(y^2+(x+m)^2)^{\frac{1}{2}}} + p dt = -d\frac{dy}{dt};$$

e supponendo, che la corda abbia una direzione sempre tangente al latercolo della curva, è chiaro, che in questa ipotesi la curva descritta dal centro di gravità dee ridursi a quella dei projetti nei mezzi resistenti. Diffatto in ambidue i casi così succede, poichè se nelle due equazioni (7), ed (8) del primo caso, suppongasi il latercolo della curva $= d\omega$, e per introdurre la condizione della tangente in vece di b si ponga $\left(y^2+\frac{y^2dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y d\omega}{dy}$, avremo $\frac{R dy dt}{d\omega} = -d\frac{dx}{dt}$, ed $\frac{R dy dt}{d\omega} + p dt = -d\frac{dy}{dt}$, che sono le note equazioni dei projetti nei mezzi resistenti; e parimenti se nelle due Equazioni (9), e (10) si ponga $m = \frac{y dx}{dy} - x$, si riducono ancor queste alle istesse due precitate equazioni.

18. Suppongasi $= \alpha$ l'angolo, che fa la linea z con l'x, ed $= \beta$

$= \beta$ l' angolo, che la corda fa con z; avremo sen.$(\alpha - \beta) = \frac{y}{b}$; cos. $(\alpha - \beta) = \left(\frac{b^2 - y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ nel primo caso, e nel secondo sen.$(\alpha - \beta)$ $= \frac{y}{(y^2 + (x+m)^2)^{\frac{1}{2}}}$, cos.$(\alpha - \beta) = \frac{x+m}{(y^2+(x+m)^2)^{\frac{1}{2}}}$. Facendo tali sostituzioni rispettivamente nelle equazioni (7), ed (8), e nelle (9), e (10), avremo due equazioni, che le rappresentano tutte e quattro, e comprendono tutti due i casi, e sono le seguenti

(11) $\quad Q dt \text{ Cos.}\alpha - R dt \text{ Cos } (\alpha - \beta) = d\frac{dx}{dt}$

(12) $\quad Q dt \text{ Sen.}\alpha - R dt \text{ Sen.}(\alpha - \beta) - p dt = d\frac{dy}{dt}$.

19. Tali equazioni annunziano un risultato importante. È chiaro che $\left(\overline{d\frac{dx}{dt}}^2 + \overline{d\frac{dy}{dt}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ è $=$ alla forza acceleratrice corrispondente al latercolo dw; ma prendendo il valore di tal forza dalle due precedenti equazioni, si avrà una quantità riducibile alla forma $E(F + p \text{ Sen.}(\alpha - \beta) - Q \text{ Cos.}\beta)^{\frac{1}{2}} dt$, in cui E, ed F non conterranno l' arco β, e saranno comuni ad ambidue i casi; ma per il primo caso quella quantità avrà un valore, e per il secondo un altro; dunque si vede facilmente quale (a parità di tutte le altre circostanze) la forza acceleratrice nel senso della curva descritta dal centro di gravità risulta nel primo caso, e quale nel secondo, e che perciò avendo luogo lo stesso sforzo nello strascicare, come nel primo caso, e tirare, come nel secondo, apparirà la maniera di applicare più vantaggiosamente la forza animale.

20. Si rilevi inoltre, che il valor generale di $\left(\overline{d\frac{dx}{dt}}^2 + \overline{d\frac{dy}{dt}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, cioè $dt\,[Q^2 + R^2 + p^2 + 2Rp \text{ Sen.}(\alpha - \beta) - 2QR \text{ Cos.}\beta - 2Qp \text{ Sen } \alpha]^{\frac{1}{2}}$ presenta la soluzione di una questione agitata da Camus, Parent, e Deparcieux, il quale nel 1760 con una Memoria, che è negli Atti dell' Accademia di Parigi, sostenne, che un animale privo di

di gravità, non tirerebbe. Ora si faccia $p = 0$, ed avremo la forza acceleratrice $= dt\,(Q^2+R^2-2RQ\cos.\beta)^{\frac{1}{2}}$, cioè sempre positiva; ed in conseguenza la progressione del centro di gravità è indubitata, subito, che Q, ed R sieno tali da ammettere il movimento. Ciò si conferma ancora dalla prima equazione $d\frac{dx}{dt} = Qdt\cos.\alpha - Rdt\cos.(\alpha-\beta)$, dove p non è incluso, e dove il moto non può esser retrogrado, perchè R non agisce altro, che in caso di progredimento del centro.

21. Se nelle equazioni (1), (2), (3), facciasi $R = 0$, cioè suppongasi, che l'uomo cammini senza ulteriore imbarazzo, che quello del proprio peso, o di altro, che porti indosso, lo che fa variare il luogo del centro di gravità, in tal caso avremo le tre equazioni seguenti

$$\frac{yQdt}{(x^2+y^2+s^2)^{\frac{1}{2}}} - pdt = d\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{sQdt}{(x^2+y^2+s^2)^{\frac{1}{2}}} = d\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{xQdt}{(x^2+y^2+s^2)^{\frac{1}{2}}} = d\frac{dx}{dt},$$ che esprimeranno la curva descritta dal centro di gravità. Ed è opportuno di osservare, che tali equazioni vagliono, non solo per la macchina umana, ma per qualunque altro animale; avvertendo soltanto, che $Z = (x^2 + y^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ invece di rappresentare la distanza del centro di gravità dal punto in cui si riunisce lo sforzo del piede che anima il passo, deve generalmente rappresentare la distanza del centro di gravità da quel punto del piano delle x, s, che è incontrato dalla risultante degli sforzi, che fanno i piedi, che animano il passo dell'animale qualunque.

22. Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per $\frac{dy}{dt}, \frac{ds}{dt}, \frac{dx}{dt}$, ed aggiungendole tutte insieme, avremo

$$\frac{dy}{dt}d\frac{dy}{dt} + \frac{ds}{dt}d\frac{ds}{dt} + \frac{dx}{dt}d\frac{dx}{dt} = \frac{Q(ydy+sds+xdx)}{(x^2+y^2+s^2)^{\frac{1}{2}}} - pdy;$$ ed inte-

grando, nella ipotesi di Q costante, $\frac{dy^2+ds^2+dx^2}{2dt^2} = Q(y^2+s^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - py +$ Cost.. Qualora si consideri che l'elaterio dei muscoli deve essere meno energico, quando essi sono più spiegati, e voglia rappresentarsi questa ipotesi facendo $Q = \frac{m}{z}$ (supposta m una costante da determinarsi), la nostra equazione dipenderà dai logaritmi, mentre avremo, $\frac{dy}{dt} d\frac{dy}{dt} + \frac{ds}{dt} d\frac{ds}{dt} + \frac{dx}{dt} d\frac{dx}{dt} = \frac{m(ydy+sds+xdx)}{x^2+y^2+s^2} - pdy$, ed integrando $\frac{dy^2+ds^2+dx^2}{2dt^2} - \frac{m}{2}$ Log.$(y^2 + s^2 + x^2) + py +$ Cost. $= 0$.

23. Senza fermarsi ad analizzare i casi nei quali essendo Q funzione di z^2, l'equazione suddetta è integrabile, se chiamisi $d\omega$ l'elemento della curva, avremo $d\omega^2 = dy^2 + ds^2 + dx^2$; e la celerità corrispondente a tale elemento, sarà $\frac{d\omega}{dt}$, che suppongo $= v$. Quindi senza ulteriore integrazione avremo un'equazione in termini finiti, cioè $v^2 = 2Qz - 2py +$ Cost.; e nel caso di $Q = \frac{m}{z}$, avremo $v^2 = m$ Log.$z^2 - 2py +$ Cost. Introducendo in queste, ed in analoghe equazioni, che possono stabilirsi, il peso dell'uomo, e quello della massa di cui vuol supporsi caricato, e le condizioni del moto a diritta, e sinistra corrispondente all'asse delle s, si otterranno molti nuovi risultati di dettaglio relativi al calcolo delle forze muscolari; come esporrò in altra occasione, e come potrà verificare chiunque con qualche perizia di calcolo voglia anticipatamente occuparsene.

24. Ed in conferma di tale asserto finirò il presente articolo limitandomi ad osservare, che se nelle equazioni del §. 21 facciasi $s = 0$, cioè si consideri il moto in un solo piano verticale, avremo la curva descritta dal centro di gravità espressa dalle due seguenti equazioni,

$$\frac{yQdt}{(y^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} - pdt = d\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{xQdt}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$\frac{xQdt}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = d\frac{dx}{dt}$, le quali fanno vedere che tal curva è ben lontana dall'essere una parabola; ipotesi, che d'appresso i principj di M. Lambert dell' Accademia di Berlino, è stata modernamente adottata, sebbene l' equazione alla parabola sarebbe, con tali denominazioni, espressa da due equazioni ben differenti, cioè

$d\frac{dx}{dt} = 0$,

$pdt = -d\frac{dy}{dt}$.

ARTICOLO II.

25. Tutti quelli che hanno speculato sopra i trasporti, incontrarono tante difficoltà nei dettagli relativi al Carro, o altro Meccanismo, che sostiene la materia da trasportarsi, alla natura dell'animale, che vi si impiega, ed alla qualità della strada da percorrersi, che i risultati, comunque ingegnosi ed utili, non appartengono, che a certi casi determinati.

26. Ho creduto, che il miglior metodo per ottener qualche cosa di generale, fosse quello di paragonare nelle diverse circostanze la fatica, che sopporta il motore animale, e quindi senza imbarazzarsi di conoscere l' assoluto, tirar partito dai dati di relazione, come si vede dal Saggio, che mi son proposto di dare in questo articolo.

27. Sia un piano orizzontale, all'estremità del qual sieno due pulegge A. B, (*) sopra le quali passa un filo PABM (che suppongo privo di gravità), le di cui porzioni AP, BM sono verticali, e la intermedia porzione AB orizzontale, e alle di cui estremità pendano due corpi eguali P, M. Un uomo, che in un

(*) La figura, che facilita l'intelligenza di questo e dei seguenti paragrafi, è stata omessa, perchè il Lettore, volendo, può dietro il semplice enunziato momentaneamente descriverla.

punto qualunque C del piano, prenda in mano il detto filo, senza levarlo dalla sua direzione, non può sentire impressione veruna di forza, per causa, che i due corpi si equilibrano vicendevolmente.

28. Astrazion fatta da qualunque attrito, o altra resistenza, se il corpo M venga levato di maniera, che non resti altro, che il corpo P con la porzione di filo PAC, in tal caso, acciò si conservi la quiete, l' uomo sentirà un' impressione equivalente a quella, che la gravità esercitava in ogni istante nel corpo M, cioè Mpdt (supponendo p la celerità prodotta in un secondo minuto dalla gravità), e quindi Mpt in un determinato tempo t.

29. Ritornando al caso del §. 27, suppongasi, che mancando, come in quel caso, ogni resistenza per la parte della puleggia B, ve ne sia per parte dell' altra A; allora l' equilibrio sussisterà, sebbene si scemi il corpo M; e se sia N la quantità di cui, salvo l' equilibrio, si può diminuire il corpo M, l' uomo contemplato nel §. 28, potrà, tenendo il filo in C, mantenere l' equilibrio, non consumando durante il tempo t forza maggiore di $(M - N)pt$.

30. Se poi nel caso del §. 27 l'uomo che prende il filo nel punto C, senza alterare la direzione di esso, progredisca nel piano AB, e faccia per conseguenza scorrere il filo in maniera, che il corpo P salga in P', e l'M scenda in M' in un tempo t, avrà esso esercitato una determinata azione necessaria per trasportare in tal guisa se stesso da C in C'.

31. Nella mia Memoria sul Principio delle velocità virtuali stampata nel 1796, oltre al dimostrare l' equazione dei momenti, trovai che tale equazione, non solo si verificava a differenze infinitesime, come era stata fino a quell' epoca adottata dai Geometri, ma ancora in molti casi a differenze finite. Questa equazione dei momenti a differenze finite, fu riportata in seguito dal celebre M. Prony con un Teorema elegante da me dedottone, nella sua Meccanica Filosofica, in cui con somma sagacità perviene all' equazione dei momenti, senza la supposizione del movimento da imprimersi al sistema. La suddetta mia equazione fa vedere, che vi è una classe di equilibrj, nella quale

il

il sistema può prendere posizioni comunque differenti, e le forze restare nondimeno in equilibrio.

32. Il sommo Geometra Sig. la Grange mi scrisse in proposito di quella mia opera = *vôtre travail sur ce sujet a, outre son propre mérite, celui d'avoir fait éclore d'autres ouvrages*, . . . ed inoltre = *vous observez avec raison qu'il y a des cas, où l'equation des vitesses virtuelles a lieu aussi par rapport aux différences finies*; e quindi convenendo meco, che = *le sisteme alors en changeant de situation, ne cesse pas d'être en equilibre* =, si compiacque di assegnare il suo posto a questa nuova classe di equilibrj da mè trovata, soggiungendo che tali equilibrj potevano riguardarsi come se tenessero un medio = *entre les equilibres stables, où le sisteme révient de lui même à son premier état lorsqu'il en est dérangé, et les equilibres non stables, où le sisteme une fois dérangé de son état d'equilibre, tend à s'en eloigner de plus en plus*.

33. Appunto à questa terza classe di equilibrj scoperta, e provata con l'equazione dei momenti a differenze finite, appartiene il caso contemplato nel §. 30, di maniera, che non resta dubbio, che allora combinandosi (per modo di dire) il moto, e l'equilibrio, l'uomo, che passa da C in C', non altera il rispettivo equilibrio dei due corpi M, e P tra loro. Infatti essendo CC' = PP' = MM = v, avremo sempre $Pv - Mv = 0$, supponendo P = M, e v la velocità proporzionale agli spazj percorsi, che nel corpo P, che sale, deve computarsi con un segno diverso da quello assegnato alla celerità eguale del corpo M, che scende.

34. Che se l'uomo si muova da C in C' sul supposto del §. 28, cioè, che la porzione di filo CBM, ed il corpo M sieno distrutti, dovrà allora soffrire una impressione equivalente a quella, che soffriva il corpo M, il quale, oltre al moto vM durante il tempo t, ha subìto dalla gravità l'impressione Mpt, e quindi l'uomo, prescindendo dallo sforzo necessario a portare la propria macchina, nell'andare da C in C'. e condurre il corpo P in P', avrà consumato una quantità di moto = Mpt + Mv.

35. Qualora, come nel (§. 27), la puleggia A produca una resi-

sistenza, la speculazione necessaria per valutare la forza dell'uomo, che passa da C in C', diventa alquanto più complicata. Infatti mentre all' uomo, che soltanto sostiene il corpo P, la resistenza è vantaggiosa, e riduce, come notammo, il suo sforzo ad $(M - N)\,pt$, all' uomo che cammina, la resistenza divien nociva, e con l' istesso ragionamento si vedrà, che riduce l' uomo in necessità di esercitare uno sforzo $= (M + N)\,pt + (M + N)\,v$, nel portarsi da C in C', ed elevare P dal punto P all'altro P': ben inteso, che quì per brevità si fa una supposizione, che, adesso non vi è luogo a rettificare, e non può generalmente adottarsi, cioè che la resistenza sia eguale in un senso, e nell' altro, e che nell'atto di principiare il moto, e nella sua continuazione, sia sempre la stessa, che abbiamo rappresentato per N, ed inoltre, che si prescinde dallo sforzo necessario all' uomo per trasportare la propria macchina.

36. In tale supposizione sembrami doversi così correggere la formola del Sig. Bezout. Secondo i principj dati, questo eccellente Geometra nel 2° volume della sua Meccanica, la soprannotata formola dovrebbe essere soltanto $(M + N)\,pt + Mv$; ma secondo il raziocinio fin quì adottato si vede, che esistendo ambidue i corpi con la resistenza nella sola puleggia A, come nel § 27, acciò sieno sul punto di muoversi, e di portarsi M in M', e P in P', è necessario, che sia al corpo M aggiunto il corpo N. Se in questo stato di cose l' uomo, che prende il filo in C, passa in C'; e P in P', ed M in M' (supposto sempre, che la resistenza resti eguale tanto nel moto, quanto nell'atto che il moto è per principiare) esercita una determinata azione; qualora si tolgano il filo, i corpi M, ed N, l' uomo per andare da C in C', e portare P in P', dovrà ancora subire una impressione eguale al moto consumato dai corpi M ed N, cioè $(M+N)\,pt + (M + N)\,v$, come porta la nostra formola.

37. E quindi si deduce direttamente la prova di un effetto, che i Pratici conoscono, cioè la difficoltà, che si prova a fare, che i Cavalli attaccati ad un Carro, alla salita, riprincipino il moto una volta, che si sono fermati. La forza necessaria per soste-

stenere fermo il Carro, sarà in ogni istante (§. 27) $(M-N)pdt$; e quella necessaria per metterlo al punto del movimento progressivo, $(M+N)pdt$; onde la differenza tra il sostenere, e il muovere, è $2Npdt$, e perciò quanto maggiori sono gli attriti del Carro, tanto si prova più facile sostenerlo fermo in un piano inclinato, e più difficile, metterlo in movimento all' insù; e tutto indipendentemente dalla coesione, e dall' attrito maggiore nei primi istanti del moto.

38. Premesso tutto ciò, suppongasi un piano inclinato all' orizzonte dell' angolo ω. Se sopra di esso sia situato un corpo P, la gravità farà sopra di questo in ogni istante l' impressione $Ppdt$ Sen ω; e se il corpo P moltiplicato per m, rappresenti l' attrito, e per n, la coesione, la formola esprimente il moto distrutto, e quello eccitato da un motore animale, che durante il tempo t faccia strisciare con la velocità v il corpo medesimo contro il senso della gravità per il detto piano, sarà

$$Ppt \text{ Sen.}\omega + (m+n)\,Ppt + (m+n)\,Pv + Pv \text{ Sen } \omega .$$

39. Quindi apparisce un' altra correzione da farsi alla formola di M. Bézout, la qual formola porterebbe l' ultimo termine, non Pv sen.ω, come in questa mia, ma semplicemente Pv. Infatti inerendo alla terza classe di equilibrj dedotta dalla mia equazione dei momenti a differenze finite, suppongasi il corpo P sopra il preaccennato Piano inclinato, e sostenuto da un filo, il quale diretto parallelamente al Piano, passi per una puleggia situata all' estremità superiore del Piano stesso, e scenda verticalmente, avendo alla sua estremità un corpo $R=P \sin \omega-(m+n)P$; l' equilibrio sussisterà, giacchè l' attrito, la coesione ed ogni resistenza stanno a diminuire il corpo R, che impedisce al corpo P di scendere lungo il Piano inclinato. Ma se questo corpo R debba esser tale da mettere il corpo P nel punto di essere strascinato all' insù per il piano inclinato, converrà che il corpo R sia $= P \text{ sen.}\omega + (m+n)P$. Se in questo stato di cose un uomo prenda il filo, e progredisca all'insù per il piano, eserciterà una determinata azione, sempre supponendo m ed n l' istesse, quando il moto è per principiare, e quando è principiato. Ma se questo

se-

segua durante il tempo t con la velocità v, il corpo R consumerà una quantità di moto $= Rpt + Rv$; dunque levando detto corpo R, e volendo che l'uomo tirando il filo produca l'istesso effetto nel corpo P, converrà, che consumi esso la medesima quantità di moto, onde sostituendo ad R il suo valore P sen.$\omega + (m+n)$ P, tale quantità di moto sarà $= Ppt$ sen.$\omega + (m+n)Ppt + Pv$ sen.$\omega + (m+n)Pv$, sebbene secondo i principj di M. Bezout, adattando le di lui denominazioni alle mie, sarebbe soltanto $= Ppt$sen.$\omega + (m+n)Ppt + Pv$; lo che mi è sembrato pregio dell'opera di notare, giacchè l'autorità di un così celebre Geometra potrebbe facilmente sedurre.

40. Dimostrato in tal guisa, che la quantità di moto, che un animale, il quale nel tempo t, e con la celerità v, tira all'insù per un piano inclinato all'orizzonte dell'angolo ω, un corpo P, deve consumare, sia $= Ppt$sen.$\omega + (m+n)Ppt + (m+n)Pv + Pv$sen.$\omega$, facilmente, con raziocinio analogo, si conclude, che se il corpo P deva strisciare nel piano istesso dall'alto al basso, con l'istessa celerità v, e nell'istesso tempo t, la quantità di moto, che l'uomo dovrà consumare attaccandosi al filo nell'istesso punto, sarà $= Ppt$ sen.$\omega - (m+n)Ppt + (m+n)Pv - Pv$ sen.ω, avvertendo, che la quantità Pvsen.$\omega - (m+n)Pv$, che esprime il moto del corpo R, in questo caso, deve esser presa negativamente, giacchè il corpo R si muove dal basso in alto, mentre nel caso precedente si muoveva dall'alto al basso.

41. Posto tuttociò, credo che non sarà difficile a persuadersi, che la forza, o la fatica esercitata da un animale, sarà proporzionale alla quantità di moto, che esso eccita, e consuma durante un dato tempo, di modo che, a parità di circostanze relativamente al meccanismo dell'animale, che può in una situazione defaticarsi meno, che in un'altra, trovata la relazione tra le diverse quantità di moto, potremo ancora assegnare quella, che passa tra le diverse fatiche dell'animale posto in attività.

42. E sul particolare dei trasporti prendendo in considerazione le strade, resulta dal fin qui esposto, che si potrà direttamen-

mente paragonare la fatica, che un Cavallo, per esempio, deve fare per tirare in una strada di data inclinazione un grave P, a quella necessaria per tirarlo in una strada orizzontale, e simile all' altra in tutto il resto. Infatti nel caso dell' orizzontale, la nostra formola, fatto $\omega=0$, diventa $=(m+n)Pu\pm Ppt$, ove il segno + vale per il paragone da farsi con una salita, e il segno — per una scesa; e se pongasi diverso il tempo, cioè $=t'$ nel caso della strada orizzontale e facciasi il paragone tra le due espressioni, avremo la lunghezza della strada orizzontale, e quella dell' inclinata, che l' istesso animale può con l' istessa fatica, e con l' istessa velocità percorrere tirando dietro a se il corpo P.

43. Ponendo coerentemente a tale ipotesi $P\,p\,t\,\text{sen.}\omega \pm (m+n)Ppt + (m+n)Pu \pm Pu\,\text{sen.}\,\omega = \pm(m+n)Ppt' + (m+n)Pu$, avremo $t' = \frac{Ppt\,\text{sen.}\omega \pm (m+n)Ppt \pm Pu\,\text{sen.}\omega}{\pm(m+n)Pp}$, onde con l' istessa fatica con cui l' animale in questione percorre una salita inclinata dell' angolo ω, e della lunghezza t, percorre una strada orizzontale della lunghezza $\frac{Ppt\,\text{sen.}\omega + (m+n)Ppt + Pu\,\text{sen.}\omega}{(m+n)Pp}$, e della lunghezza $\frac{Pu\,\text{sen.}\omega - (m+n)Ppt - Ppu\,\text{sen.}\omega}{-(m+n)Pp}$ nel caso di una scesa egualmente inclinata.

44. Avendo per oggetto di mostrare la fecondità di questo sistema di ricerca, e non di esporne i risultati, tralascio il paragone tra la scesa, e l' orizzontale, giacchè molte circostanze sono da considerarsi, e segnatamente il meccanismo dell' animale, che agisce assai diversamente, impiegato nella scesa che nella salita. Ed accennando il paragone tra l' orizzontale, e la salita inclinata dell' angolo ω, rilevo, che l' orizzontale da percorrersi con l'istessa fatica con cui si è percorsa la salita della lunghezza t, è espressa dalla formola $t + \frac{\text{sen.}\omega}{m+n}t + \frac{u\,\text{sen}\,\omega}{(m+n)p} = t + \frac{\text{sen}\,\omega}{m+n}\left(t + \frac{u}{p}\right)$, e perciò la differenza tra la salita, e l' orizzontale da percorrersi

con egual celerità, e consumo di moto, sarà $= \frac{\text{sen.}\,\omega}{m+n}\left(t+\frac{u}{p}\right)$.

45. Si vede che la differenza $\frac{\text{sen.}\,\omega}{m+n}\left(t+\frac{u}{p}\right)$ scema, quando scema l'angolo ω; e questo a colpo d'occhio combina con quanto ancor senza calcolo, si concluderebbe.

46. Apparisce ancora, che con una maggior velocità, questa differenza diventa più grande, e precisando la relazione di tali variazioni, si può regolare nelle differenti inclinazioni la celerità dei trasporti combinabilmente con l'indennità degli animali, che vi si impiegano.

47 Finalmente tale differenza si fa maggiore quando la quantità $m+n$ diventa minore, cioè quando gli attriti, e le resistenze diminuiscono; dal che si deduce, che le facilitazioni, che si procurano agli attiragli di qualunque sorte, perdono assai della loro influenza (ancò tenuto conto della debita proporzione rispetto a tutte le altre circostanze) nel passare dalla strada orizzontale alla salita; di maniera che quanto convengono per la felicità dei trasporti le facilitazioni adattabili per gli attiragli, e vetture nelle strade orizzontali, altrettanto è necessario, che nelle salite sia compartita la materia da trasportarsi tra il portare, e il tirare, ad oggetto di conservare agli animali l'istesso grado di salubrità, e di esistenza.

48. A questo oggetto conviene riunire a tali vedute quelle esposte nel 1.° Articolo, e quindi si vedrà come possa costruirsi una scala di relazioni, mediante la quale, la fatica degli animali possa adoperarsi, e non profondersi, a scapito dei sociali interessi. È stato osservato che l'accelerazione del moto del sangue è proporzionale, in molte circostanze, alla intensità degli sforzi muscolari, e se questa legge può generalmente adottarsi, illustrerà i principj da me stabiliti, e i dettagli, che se ne deducono (come ognuno potrà vedere variando le ipotesi nelle quantità Q, R, u, t, ecc.), e il tutto servirà mirabilmente al progresso di questo importante ramo di scienza.

49. Chiunque si prenderà la pena di riflettere sopra questi prin-

principj, potrà convincersi del vantaggio, che il commercio, e le sociali comunicazioni risentirebbero dal preferire le strade più lunghe, ma meno inclinate all' orizzonte, seguendo al possibile le ripe dei Fiumi, quando si tratta di Carriaggi, che non pesano sopra i Cavalli, e viceversa che qualora si tratta di trasporti, che pesano sopra i Cavalli, è preferibile ad una strada orizzontale, una inclinata, quando sia debitamente più corta.

50. La mancanza di precisione nel valutare queste verità fa negligere certi Progetti, che non presentano alla prima vista tanta utilità, quanta, in seguito delle precedenti Teorie si raccoglie, che realmente ne arrecherebbero. Per es.° tra Roma, e Firenze si incontra, o la montagna di Somma, o quella di Radicofani, che obbligano gli attiragli di ogni specie a ritardi, e fatiche di gran conseguenza, e che per quanto a me sembra, si eviterebbero con dispendio di gran lunga inferiore al vantaggio, profittando delle Bonificazioni fatte in Val di Chiana, ed aprendo in quella Provincia una strada, la quale, aberrando pochissimo dalla orizzontale, da Camoccia passando presso Città della Pieve, ed Orvieto, imboccasse verso Viterbo nell' attuale strada di Roma. Le antiche vicende d' Italia, e i disordini delle acque indussero probabilmente i Carriaggi a seguitare i Pedoni, e le Cavalcature per le alture di Somma da una parte, o di Radicofani dall' altra, abbandonando le traccie della celebre via Cassia, la quale, come si vede diffusamente nelle mie Memorie sopra la Val di Chiana, passava per quella Provincia, secondo ciò che le antiche storie, e le vestigia tuttora esistenti, persuadono.

51. La diffusione, e lo sviluppo di siffatte Teorie contribuirebbero ad illuminare sopra i loro veri interessi certe Popolazioni di montagna, che talvolta s' impegnano acciò la grande strada Commerciale passi per le loro Città, e Castelli, non valutando, che molte altre Popolazioni ancora ottengono lo stesso, e così la strada abbandona la Pianura altrettante volte, ed ogni Popolazione si risente degl' incomodi di tante salite, e scese, quante sono le ottenute deviazioni, mentre potrebbe non avere che il so-

solo tronco scosceso necessario per congiungersi colla strada di Pianura .

52 Finisco con osservare , intorno al meccanismo dei Carri , due cose ; la prima , che il fissare ogni ruota ad un asse , che internandosi nel Carro . giri con la ruota medesima , è di una costruzione più difficile , ma nella maggior parte de' casi vien dimostrato dall'esperienza essere assai vantaggiosa, e giova accennarne la causa principale , che a me pare assegnabile nel modo seguente . Quando l' asse è fisso al Carro , e s' interna nella ruota che gira intorno ad esso , come comunemente costumasi , la ruota riceve il principale eccitamento al moto dall' urto , o pressione , che l' asse esercita in un punto della semi-periferia inferiore della cavità in cui l' asse istesso s' interna ; al contrario quando l' asse fisso con la ruota s' interna in una cavità circolare praticata nel Carro , la ruota riceve il principale eccitamento al moto dall' urto , o pressione che il Carro esercita in un punto della semiperiferia superiore dell' asse ; dunque nel 1.° caso la ruota è spinta con assai minor vantaggio , che nel 2.° , perchè rispetto ad una specie di vette la varia posizione , e la distanza tra il descritto punto inferiore, e il superiore , paragonata debitamente al raggio della ruota , è per lo più non poco significante .

53. La seconda osservazione verte sopra le disposizioni delle ruote . Furono immaginati dei Carri con tre ruote , ma la simmetria , e la stabilità le fecero disporre in modo , che formando un triangolo isoscele, alla metà della distanza tra le due di dietro, ne corrispondesse una davanti , o viceversa ; e quindi questo Carro apre tre solchi in terra, mentre un Carro a quattro ruote, quando è ben costruito, non ne apre che due in diritto, e per conseguenza le tre ruote possono portare resistenze maggiori , che quattro . Io ho disposto due ruote nella istessa linea retta da una parte del Carro , e dall' altra parte una ruota sola situata parallelamente a quelle, in modo che il piano in cui girano le due ruote , che sono dalla istessa parte , sia distante dal piano parallelo in cui gira la ruota unica esistente dall' altra, per la metà della distanza tra le due ruote dell' istessa parte , ed i centri delle due ruote

te dall' istessa parte, il medio sia la distanza tra il centro della ruota unica, e quello della ruota di dietro, ed il lato minimo sia la distanza del centro della stessa ruota unica dal centro della ruota davanti, cosicchè questi tre lati sieno respettivamente tra loro come, 1, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}\sqrt{13}$.

54. Con queste dimensioni si ottiene una sufficiente stabilità; l' attiraglio apre due sole traccie nel terreno, soffre minori resistenze, che se avesse quattro ruote, ne risparmia una, e non pesa davvantaggio sopra i Cavalli. Ho paragonato un piccolo Carro a quattro ruote con uno a tre di siffatta costruzione, ed i medj di varie esperienze mi hanno dimostrato un significante vantaggio del secondo sopra il primo, specialmente nelle strade fangose, e non orizzontali. Quindi, ove i riguardi di simmetria, e le difficoltà, e il dettaglio della prima costruzione, si pospongano all' utile, sembra che l' accennato meccanismo possa meritare attenzione, tanto più, che è facile combinare una semplice manovra, per cui nelle strade orizzontali lavorassero tutte tre le ruote, e due sole di esse alle salite, liberando in tal guisa i Cavalli da ogni peso nel primo caso, e addossandogliene una porzione nel secondo, lo che coerentemente alle Teorie stabilite in questo secondo Articolo, sarebbe per i Cavalli medesimi di sostanziale sollievo.

APPENDICE.

Comecchè parlando di Meccanica si ha sempre presente il parallelogrammo, e la composizione delle forze, e del moto, principio importantissimo e a dimostrare il quale si sono anco modernamente occupati sommi Geometri, non ho creduto che sia quì fuori di luogo una dimostrazione da me immaginata, e che presento al Pubblico volentieri, perchè illustra alcune traccie segnate nella recente Opera, *Principes Fondamentaux de l'equilibre, & du mouvement*, del Sig Carnot, ai di cui luminosi talenti debbonsi ancora sublimi speculazioni Matematiche.

Se due linee formino un angolo α, quando un corpo ha percorso nel senso di una di esse lo spazio m, avrà nel senso dell' altra percorso lo spazio $m\cos.\alpha$, cioè la projezione della prima sopra la seconda.

Se due forze espresse da b, c concorrano in un punto, ed animino al moto un dato corpo, è chiaro che questo non può tendere altro che verso una sola direzione, e che tale direzione sarà nel Piano delle b, c. È chiaro parimente, che l'effetto delle forze b, c deve essere eguale a quello della resultante in qualunque direzione possibile situata nel detto Piano, e passante per il punto del concorso; dunque la somma delle projezioni sopra una linea qualunque delle b, c, deve essere eguale alla projezione della risultante sopra la linea medesima.

Ciò posto, per il punto in cui concorrono le b, c, determinate di lunghezza e posizione, passi un' altra linea x, e si cerchi qual' esser debba la lunghezza, e posizione di questa, nel Piano delle due linee b, c, affinchè sia la resultante delle due forze b, c. Sia α l' angolo tra b, ed x; β l' angolo tra x, e c, e γ l' angolo tra c, ed una linea qualunque r, che passi per il punto di concorso delle altre. Sarà per il principio stabilito $b\times\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+c\cos.\gamma=x\cos.(\beta+\gamma)$, e svolgendo le quantità

cos.

$\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, e $\cos(\beta+\gamma)$, avremo $b\cos.(\alpha+\beta) + c - x\cos.\beta = [b\text{sen.}(\alpha+\beta) - x\text{sen.}\beta]\,\text{tang.}\gamma$. E siccome questa Equazione deve sussistere indipendentemente dal valore di tang γ, che può esser qualunque, dovranno aver luogo separatamente le due seguenti

$$(1) \qquad b\cos.(\alpha+\beta) + c = x\cos\beta$$
$$(2) \qquad b\,\text{sen.}(\alpha+\beta) = x\,\text{sen.}\beta\,.$$

Ora se dalla equazione (2), prendiamo il valore di $\cos.\beta$, cioè $\frac{(x^2 - b^2\text{sen}^2(\alpha+\beta))^{\frac{1}{2}}}{x}$, e lo sostituiamo nella (1), otterremo, dopo aver tolto i radicali,

$$b^2 + c^2 + 2bc\cos.(\alpha+\beta) = x^2\,,$$

la quale equazione ci mostra, che la retta x deve essere in lunghezza eguale alla diagonale del parallelogrammo fatto sopra b, e c. E posto questo l'Equazione (2) c'insegna, che la linea x deve cadere sulla direzione della predetta diagonale. Per conseguenza la risultante di due forze è rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle loro direzioni.

A V V I S O

Le figure delle Memorie *Franchini*, *Valperga-Caluso*, e *Saladini* trovansi riunite in una sola Tavola alla pagina 294.